

Math. P.
348^m

Lyons, France, 1783

R

Math. P. 348 ^m

77
A n l e i t u n g

z u r

geradlinigten Trigonometrie

u n d z u r

A r i t h m e t i k d e r S i n u s e

d u r c h

R die Constructions - Methode.

V o n

F r a n z v o n S p a u n .

M ü n c h e n . 1 8 1 8 .

40 Math. P. 348 ^m



V o r r e d e.

Alles, was Cagnoli über die geradlinigte Trigonometrie in seinem dicken Quartbande analytisch deduziret, viele neue Analogien, und beynah Alles, was Euler im ersten Bande seiner Einleitung in den Differential - und Integral - Calkul aufgeführt, und theils sehr unvollständig, theils gar nicht erwiesen hat, ist in diesen wenigen Bogen zusammengestellt, und aus den Constructionen abgeleitet.

Die Constructions - Methode ist leider ganz vernachlässiget worden, und die französischen Geometer haben sogar einen Vorzug darin gesucht, die Figuren von ihren geometrischen Werken ganz auszuschließen, so, daß ihre Zöglinge ein Dreyeck zwar berechnen können, wenn drey coordinirte Größen gegeben sind, aber mit diesen Größen das Dreyeck construiren, können sie nicht. Diese Unbeholfenheit ist nicht bloß possierlich; sie setzt oft den Geometer

V o r r e d e.

in Verlegenheit, denn, wenn er keine Logarithmen - Tafeln hat, so ist er gelähmt, wohingegen derjenige, der construiren kann, die unbekannten Gröſſen mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit bestimmen kann.

Die analytischen Deductionen geben wohl richtige und bequeme Formeln, allein diese Deductionen, bey denen die Finger und nicht der Verstand, und das Aug arbeitet, sind nicht befriedigend. Man erkennt, es sey so, wie das Resultat ausweist, aber man sieht nicht, warum es so ist, und wie man zu diesem Resultate gekommen ist. Die Constructionen haben also einen groſſen Vorzug, denn mittels derselben sieht man, wie ein Verhältniſſ aus dem andern entstehe; man hat sie vor Augen, und somit prägen sich die daraus abgeleiteten Formeln weit fester in das Gedächtniſſ ein. Diese Vortheile sind so auffallend, daſſ, wer die Geometrie nach der Constructions - Methode erlernet hat, gewiſſ nie zur analytischen zurückkehren wird.

Viele, sehr viele Aufgaben sind sehr schwer durch die analytische Methode aufzulösen, und die gefundenen Formeln sind schwer zu berechnen. Z. B. gegeben sind: die Summe oder die Differenz zweyer Seiten, die Basis und die Höhe.

Die zweyte Abtheilung, die Arithmetik der Sinuse ist aus einem ganz neuen, durch eine sehr leichte Construction erwiesenen Lehr-

V o r r e d e.

satze abgeleitet. Gesetzt, er könnte auch aus einer Eulerischen Formel deduciret werden, so wäre er doch neu, wenn ihn noch Niemand aus derselben deduciret, und seine zahlreichen Anwendungen gezeigt hätte. Jeder neue Lehrsatz kann ja nur durch Ableitungen aus andern bewiesen werden. Alle unsere Geometer, Newton und Euler nicht ausgenommen, sind erbärmliche Logiker. l'Huiller und Carnot allein verdienen eine ehrenvolle Ausnahme. Alle übrigen rechnen mit den Fingern, nicht mit dem Kopfe, oder sehen wohl gar, wie der Edinburger Rezensent des Herrn Buée die geometrischen Zeichen, als magische Symbole an, die zwar nichts bedeuten, die aber dennoch durch ihre innere Kraft (power of Signs) Wahrheiten entwickeln. Vide 14. Band des Edinburger Journals.

Darum wüüschte ich eben, daß Niemand zur höheren Mathematik schreite, bevor er einen festen Grund in der Logik gelegt, richtig denken, und seine Gedanken zu ordnen gelernet hat.

Im übrigen beziehe ich mich auf meine Abhandlung: Ueber die Lehrsätze des gesunden Menschen - Verstandes in Beziehung auf das Negative, und das Unmögliche. München 1816.

Das vorliegende Werk, und meine Anleitung zur Construction aller Probleme der sphärischen Trigonometrie gehören zusammen,

V o r r e d e.

und geben einen vollständigen Unterricht in allen Theilen der Trigonometrie. Die sphärische Trigonometrie ist in Verlag zu München bey Thienemann, und zu Nürnberg bey Stein.

Erste Abtheilung.

Geradlinigte Trigonometrie.

I. Die geradlinigte Trigonometrie lehrt aus drey einem geradlinigten Dreyecke coordinirten Gröſſen alle übrigen zu finden. Doch muß keine von den gegebenen Gröſſen durch die zwey andern bestimmt seyn, denn sonst sind im Grunde nur zwey gegeben.

II. Alle Kreise sind einander ähnlich. Es verhalten sich ihre Umkreise, ihre Oberflächen, wie die ersten zweyten Potenzen ihrer Radien.

Note. Dieser Satz ist ein Postulat, und ist weder erwiesen, noch erweislich.

III. (Fig. 1.) Wenn zwey Kreise konzentrisch sind, so sind die zwischen denselben Radien liegenden Kreisausschnitte ähnlich, und es verhält sich der Bogen AB: zum Bogen ED = AC: EC, Die Sehne AB: zur Sehne ED = AC: EC. Ist AB = a ; AC = r , EC = R : so ist: $r: a = R: ED$.

Note. Auch dieser Satz ist ein Postulat. Es ist zwar der Bogen ED der n te Theil der Periferie des Kreises vom Radius EC, wenn der Bogen AB der n te Theil der Periferie des Kreises vom Radius AC ist;

aber daraus folgt nicht, daß die Bögen, und ihre aliquoten Theile ähnlich sind, im Sinne Euklydes. Sie decken einander nicht. Ist $LP = AB$; $KL = AC$, so decken sich die Dreyecke ACB und LKP , aber nicht die Kreisausschnitte ACB und LKP .

IV. Um sich die Rechnung zu erleichtern, vergleicht man jeden Kreis mit einem Kreise, dessen Radius die Einheit ist. Man setzt: $AC = R = 1$, und somit wird $ED = R. a$.

V. (Fig. 2.) Es sey AC (Fig. 2.) die Einheit, und der Radius eines Kreises. Von irgend einem Punkte A der Periferie ziehe man auf den Diameter KB eine senkrechte AE , und verlängere sie bis an die Periferie in D , so weiß man aus den Elementen, daß $AE = ED$, und $AE. ED = (AE)^2 = KE. EB$. sey.

VI. Es ist AE die halbe Sehne AD . Beziehet man diese halbe Sehne auf den Winkel ACB , so nennt man sie dessen Sinus, und bezeichnet sie durch *Sin. ACB*, oder durch *Sin. A*, wenn A den Winkel ACB bedeutet.

VII. Das Segment CE des Diameters KB , welches zwischen dem Mittelpunkte C , und dem Punkte E , wo der Sinus AE den Diameter scheidet, liegt, nennt man den Cosinus des Winkels ACB , oder A , und bezeichnet ihn durch *Cos. ACB*, oder *Cos. A*.

Folgerungen. Hieraus folgt: 1) daß der Sinus und der Cosinus eines Winkels nie größer seyn können, als der Radius, und daß der Cosinus $= 0$ sey, wenn Sinus $= 1$, und somit der Winkel ein rechter Winkel ist.

2) Wenn demnach der Radius $= 1$ gesetzt wird, so sind der Sinus und der Cosinus Fraktionen der Einheit.

3) Daß der spitze Winkel ACB und der stumpfe KCA denselben Sinus AE und den gleichen Cosinus haben. Nur ist der Cosinus des

stumpfen Winkels der Lage nach von dem Cosinus des spitzen Winkels verschieden. ✓

4) Ist der Winkel spitz, so ist sein Sinus desto gröfser, sein Cosinus desto kleiner, je gröfser der Winkel ist. Ist er stumpf, so ist sein Sinus desto kleiner, sein Cosinus desto gröfser, je gröfser der Winkel ist.

VIII. Es ist $KE = KC + CE = 1 + \cos. A$; $EB = CB - CE = 1 - \cos. A$. Das Segment EB nennt man den Sinus versus des Winkels ACB.

IX. Da $AE \cdot ED = AE \cdot AE = KE \cdot EB$ ist, so ist: $\sin.^2 A = (1 + \cos. A) \cdot (1 - \cos. A)$, und $\sin.^2 A + \cos.^2 A = 1$.

1te Erinnerung. Unter $\sin.^2 A$, $\cos.^2 A$ mufs man sich keine Quadratfläche, sondern die dritten Proportional - Linien zu $(1 : \sin. A)$, $(1 : \cos. A)$ denken.

2te Erinnerung. Diese dritten Proportional - Linien liegen im Radius CA, und ihre Summe ist gleich dem Radius.

Denn zieht man nach denselben die senkrechte EL, so hat man wegen Ähnlichkeit der Dreyecke:

$$CA : CE = CE : CL, \text{ oder } 1 : \cos. A = \cos. A : CL$$

$$CA : AE = AE : AL, \text{ oder } 1 : \sin. A = \sin. A : AL,$$

$$CL + AL = CA = \cos.^2 A + \sin.^2 A = 1.$$

3te Erinnerung. Eben so bedeutet $\sin.^3 A$ nicht den Würfel von $\sin. A$, sondern die 4te Proportional - Linie zu 1, $\sin. A$ und $\sin.^2 A$. Man ziehe LP senkrecht auf AE, so ist: $CA : AE = AL : AP$, oder $1 : \sin. A = \sin.^2 A : AP$, also ist $AP = \sin.^3 A$. Ist r der Radius eines Kreises, so ist $AP = r \sin.^3 A$, wo hingegen $(AE)^3 = r^3 \sin.^3 A$ ist. Man mufs sich wohl hüten, die 2ten, 3ten, nten Proportional - Gröfsen der trigonometrischen Linien mit ihren Potenzen zu verwechseln. ✓

X. (Fig. 2.) Errichtet man in C auf KB eine senkrechte CG, so ist der Winkel ACG das Complement des Winkels ACB; AR dessen Sinus, CR dessen Cosinus, und wegen der Parallelen $AR = CE$, und $CR = AE$, das ist der Sinus des Compliments eines Winkels $A = \text{Cos. } A$, und $\text{Cos. Compl. } A = \text{Sin. } A$.

XI. In der Elementar - Geometrie nennt man Tangente eine gerade Linie von unbestimmter Länge, die einen Kreis berührt. In der Trigonometrie nennt man Tangente eines Winkels ACB jenen Theil dieser unbestimmten Linie, welcher zwischen dem Berührungspunkt A, und dem verlängerten Schenkel CB liegt. AF ist somit die Tangente des Winkels ACB. Sie ist senkrecht auf dem einen Schenkel, und schneidet den andern unter einem Winkel AFC, welcher das Complement des Winkels ACB ist. Sie wird durch *Tang. ACB* bezeichnet.

1te Erinnerung. Den auf dem Diameter KB senkrechten Diameter GL werden wir die Axe nennen.

2te Erinnerung. Bey Messungen geometrischer Gröſſen muß man einen fixen Punkt annehmen, und bestimmen, nach welcher Richtung gemessen wird. Bey Winkelmessungen versetzt man sich im Gedanken in den Mittelpunkt des Kreises, dessen Ausschnitt der Winkel ist, und zählt von der rechten zur linken Hand. Die Grade des Winkels ACB werden von B nach A gezählt.

Die dem Winkel coordinirten Linien, welche im Diameter KB liegen, werden von C aus nach B und nach K gemessen, also in entgegengesetzter Richtung.

Diesen Unterschied in der Lage bezeichnen die Geometer durch den Ausdruck positiv (+) und negativ (—) und sagen, der Cosinus eines spitzen Winkels A sey positiv ($\text{Cos. } A$), weil er ein Stück des Radius CB ist; wenn aber der Winkel A stumpf ist, so sey sein Cosinus negativ ($-\text{Cos. } A$); weil er dann ein Stück des Radius CK ist.

Der spitze Winkel wird als Norm angenommen; alle demselben coordinirten Gröſſen sind positiv.

XII. Die Tangente AF des Winkels ACB wird vom Berührungspunkte A aus von der Linken zur Rechten gemessen.

Da das Dreyeck ACF rechtwinklicht, und dem Dreyecke ACE ähnlich ist, so ist: $CE:AE = CA:AF$, oder $\text{Cos. } A; \text{Sin. } A = 1:AF$, also:

$$AF = \text{Tang. } A = \frac{\text{Sin. } A}{\text{Cos. } A} \text{ eben so ist:}$$

$$CE:CA = CA:CF, \text{ oder } \text{Cos. } A:1 = 1:CF.$$

Diese Linie nennt man die Secante des Winkels A, und bezeichnet sie durch $\text{Sec. } A$, es ist also:

$$CF = \text{Sec. } A = \frac{1}{\text{Cos. } A}.$$

XIII. Im Dreyecke CAF ist $CF^2 = CA^2 + AF^2$, oder $\text{Sec.}^2 A = 1 + \text{Tang.}^2 A$, also ist $\text{Sec.}^2 A - \text{Tang.}^2 A = (\text{Sec. } A + \text{Tang. } A)(\text{Sec. } A - \text{Tang. } A) = 1$. Das ist: der Radius ist die mittlere Proportional-Gröſſe zur Summe und zur Differenz der Secante und der Tangente.

XIV. Verlängert man die Tangente bis sie in H die verlängerte Axe schneidet, so ist AH die Tangente des Winkels ACG, oder des Winkels, welcher den Winkel ACB zu 90° ergänzt. CH ist die Secante dieses Winkels. Man bezieht aber diese Linien auf den Winkel ACB, und betrachtet sie als coordinirte Gröſſen zu demselben. Man sagt also AH sey die Cotangente des Winkels ACB, CH dessen Cosecante, und bezeichnet sie durch $\text{Cot. } ACB; \text{Cosec. } ACB$.

XV. In den ähnlichen Dreyecken CAH, CAR ist:

$$CR:AR = CA:AH, \text{ oder } \text{Sin. } A: \text{Cos. } A = 1:AH$$

$$CR:CA = CA:CH, \text{ oder } \text{Cos. } A:1 = 1:CH, \text{ also}$$

$$AH = \text{Cot. } A = \frac{\text{Cos. } A}{\text{Sin. } A}, \quad CH = \text{Cosec. } A = \frac{1}{\text{Sin. } A}.$$

Auch ist $CH^2 - AH^2 = \text{Cosec.}^2 A - \text{Cot.}^2 A = (\text{Cosec. } A + \text{Cot. } A) \cdot (\text{Cosec. } A - \text{Cot. } A) = (CA^2) = 1$.

XVI. In dem rechtwinklichten Dreyecke HCF ist CA senkrecht auf der Hypothenuse. Es ist also: $AF:CA = CA:AH$, oder $\text{Tang. } A:1 = 1:\text{Cot. } A$, also ist:

$\text{Tang. } A \cdot \text{Cot. } A = \frac{\text{Sin. } A}{\text{Cos. } A} \cdot \frac{\text{Cos. } A}{\text{Sin. } A} = 1$, das ist: der Radius ist die mittlere Proportional - Gröfse zur Tangente und zur Cotangente.

Erinnerung. Die Tangente und die Cotangente werden vom Berührungspunkte A; die Secante und die Cosecante vom Mittelpunkte C gemessen.

XVII. Man verlängere CA, und auf CF errichte man in F eine senkrechte Linie, welche den verlängerten Radius in S schneidet, so ist:

$CA:AF = AF:AS$, oder $1:\text{Tang. } A = \text{Tang. } A:AS$, und $CS = CA + AS = 1 + \text{Tang.}^2 A$, weil $AS = \text{Tang.}^2 A$ ist; es ist aber $1 + \text{Tang.}^2 A = \text{Sec.}^2 A$, die dritte Proportional - Gröfse zu CB und CF.

Erinnerung. Auch hier bezeichnen die Exponenten keine Potenzen, sondern 2te, 3te, nte Proportional - Linien.

XVIII. Der spitze Winkel ist die Norm für die Lage und die Richtung der demselben coordinirten trigonometrischen Linien; mit dieser muß man also die Lage und die Richtung der dem stumpfen Winkel coordinirten Linien vergleichen.

(Fig. 3.) Es sey GCB ein stumpfer Winkel. Die von G auf den Diameter gefällte GM ist dessen Sinus, und hat dieselbe Richtung von oben nach unten, wie AE der Sinus des spitzen Winkels ACB; also ist der Sinus des stumpfen Winkels positiv.

Der Cosinus des Winkels GCB ist das Segment CM. Dieses liegt auf der linken Seite von C, und wird von C nach M von der Rechten zur

Linken gemessen; allein CE der Cosinus des spitzen Winkels wird von C nach E, von der Linken zur Rechten gemessen; also haben die beyden Cosinus entgegengesetzte Richtungen; da man nun CE als positiv annimmt, so wird CM negativ.

Die Tangente GL gehet vom Berührungs - Punkte G nach I dem Durchschnits - Punkte von der Rechten zur Linken, wo hingegen die Tangente AF des spitzen Winkels von A nach F von der Linken zur Rechten geht; also ist die Richtung der Tangente des stumpfen Winkels der Richtung der Tangente des spitzen Winkels entgegengesetzt. Die Tangente des stumpfen Winkels wird also negativ genommen.

Die Richtung der Cotangente GH von der Linken zur Rechten ist der Richtung der Cotangente AH des spitzen Winkels von der Rechten zur Linken entgegengesetzt; also ist die Cotangente des stumpfen Winkels negativ.

Eben so sieht man, daß die Secante CI der Secante CF der Lage nach entgegengesetzt sey, also ist die Secante des stumpfen Winkels negativ. Allein CH ist die gemeinschaftliche Cosecante des Winkels GCH, ~~und~~ und des spitzen ACB, also ist die Cosecante des stumpfen und spitzen Winkels positiv.

XIX. Winkel von 180° und darüber sind Undinge; allein man kann fragen, wie die zu einem Bogen von $180^\circ + A$ coordinirten trigonometrischen Linien liegen. Dieses erkennt man leicht aus der Figur 3. RM ist der Sinus des Bogens BAGKR, und wird von R nach M von Unten nach Oben gemessen, also der Linie AE entgegengesetzt, folglich negativ. Ebenso ist CM der Cosinus dem CE entgegengesetzt. Allein die Tangente RI hat dieselbe Richtung von der Linken zur Rechten wie AE. Ebenso die Cotangente RL, welche so wie die Cotangente AH von der Rechten zur Linken gemessen wird; also sind die Tangente und Cotangente positiv, die Secante CI, und die Cosecante CL negativ. So kann man in jedem Falle mit Hülfe der Figur die Lage der zu einem Bogen

gehörigen Linien mit dem Normal - Bogen, und seinen Coordinaten vergleichen, und bestimmen, ob sie positiv oder negativ seyen, das ist, ob sie dieselbe Richtung, oder eine entgegengesetzte haben.

Erinnerung. Ebenso sieht man ohne weiters aus der Figur, daß $\text{Cos. GCB} = \text{Cos. } 90^\circ + \text{GCH} = \text{GS} = - \text{Sin. GCH}$ sey; weil $\text{GS} = \text{MC}$ ist und so weiter. Die Ansicht der Figur hebt alle Zweifel; nur muß man nicht vergessen, daß in diesen Fällen das Zeichen $(-)$ nicht die Subtraktion, sondern die Entgegensetzung der Lage, und der Richtung bedeute.

XX. Das Zeichen $(-)$, wenn es irgend einer trigonometrischen Gröfse vorgesetzt ist, bedeutet also eine der Normal - Richtung entgegengesetzte Richtung. Der Ausdruck $(- \text{Cos. } A)$ ist also ein unbestimmter Ausdruck, und bedeutet den Cosinus jedes Bogens, dessen Richtung der Richtung des Cosinus des spitzen Winkels A entgegengesetzt ist; also ist $(- \text{Cos. } A)$ der Cosinus von $180^\circ + A$, und auch von $180^\circ - A$, und gehöret auch den Bögen $(3\pi + A)$ und $(3\pi - A)$ etc. Allein man hüte sich wohl daraus zu folgern, daß $\text{Cos. } A + \text{Cos. } (180^\circ - A) = 0$ sey. Entgegengesetzte Gröfsen können nicht addiret werden, wenn man nicht das Fundamentum Oppositionis aufhebt.

XXI. (Fig. 2.) Die Tangente wächst von 0 bis zu jeder denkbaren Gröfse; allein ist der Winkel ein rechter, so ist CF mit AF (Fig. 2) parallel, und kein Durchschnits - Punkt F möglich. Die Geometer sagen, in diesem Falle sey die Tangente unendlich.

XXII. Man hat die Gröfse der Sinus, Cosinus etc. der Winkel in Theilen des Radius berechnet, und in Tafeln gebracht. Gesetzt, man kennet den Sinus und den Cosinus eines Winkels A , so sind die dem Winkel $\frac{1}{2} A$ coordinirten Gröfsen leicht zu finden.

XXIII. (Fig. 4.) Es sey $\text{ACB} = A$; so ist $\text{AG} = \text{Sin. } A$, $\text{CG} = \text{Cos. } A$, $\text{GB} = 1 - \text{Cos. } A$; $\text{KG} = 1 + \text{Cos. } A$. Man ziehe die Sehnen

AB und AK, CD senkrecht auf AB; CF senkrecht auf AK, so ist $AB = 2 AE = 2 \sin. \frac{1}{2} A$; also $CE = AF = FK = \cos. \frac{1}{2} A$. Nun ist $(AB)^2 = 4 \sin.^2 \frac{1}{2} A = (AG)^2 + (GB)^2 = \sin.^2 A + 1 - 2 \cos. A + \cos.^2 A = 2 (1 - \cos. A)$, weil $\sin.^2 A + \cos.^2 A = 1$; da nun $4 \sin.^2 \frac{1}{2} A = 2 (1 - \cos. A)$, so ist $\sin. \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{1 - \cos. A}}{2}$.

Ebenso ist $(AK)^2 = 4 \cos.^2 \frac{1}{2} A = (AG)^2 + (GK)^2 = \sin.^2 A + 1 + 2 \cos. A + \cos.^2 A = 2 (1 + \cos. A)$, also ist:

$$\cos. \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{1 + \cos. A}}{2}$$

XXIV. Folglich ist:

$$DT = \text{Tang.} \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{1 - \cos. A}}{\sqrt{1 + \cos. A}}; DM = \text{Cot.} \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{1 + \cos. A}}{\sqrt{1 - \cos. A}}$$

$$CT = \text{Sec.} \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos. A}}; CM = \text{Cosec.} \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos. A}}$$

XXV. Man verlängere AG bis an die Periferie, so ist der Bogen $BL = AB$, und da der Winkel BAI den halben Bogen BL zum Maafse hat, so ist $BAL = \frac{1}{2} A$.

In dem rechtwinklichten Dreyecke AGB ist: $AG : GB = 1 : \text{Tang. BAG}$, oder $\sin. A : 1 - \cos. A = 1 : \text{Tang.} \frac{1}{2} A$, also $\text{Tang.} \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{\sin. A}$.

Der Winkel AKB hat den halben Bogen AB zum Maafse, und ist also $= \frac{1}{2} A$. Der Winkel KAG ist sein Compliment $= 90^\circ - \frac{1}{2} A$, also ist: $AG : GK = 1 : \text{Tang. KAG} = 1 : \text{Cot. AKG}$, oder $\sin. A : 1 + \cos. A$, folglich $\text{Cot.} \frac{1}{2} A = \frac{1 + \cos. A}{\sin. A}$. Diese Formen des Ausdrucks sind mit den obigen gleichbedeutend.

XXVI. (Fig. 5.) Es sey der Winkel $ACB = A$; so ist DE (die Tangentes eines Compliments), $= \text{Cot.} A$, $CE = \text{Cosec.} A$.

Man verlängere DE, und mache $EF = CE$, so ist $DF = \text{Cosec. } A + \text{Cot. } A$, $DG = \text{Cosec. } A - \text{Cot. } A$.

Man ziehe CF und CG, so sind die Dreyecke ECF, ECG gleichschenkligh, und da der Winkel $DEC = ACB = A$ ist, so ist $EFC = ECF = FCB = \frac{1}{2} A$; somit $DF = \text{Cosec. } A + \text{Cot. } A = \text{Tang. } DCF = \text{Cot. } \frac{1}{2} A$.

Da $GE = CE = EF$ ist, so ist GCF ein rechter Winkel, also $DCG = DFC = \frac{1}{2} A$, Es ist also $GD = \text{Cosec. } A - \text{Cot. } A = \text{Tang. } DGC = \text{Tang. } \frac{1}{2} A$.

XXVII. Es ist also auch: $DF \cdot DG = (\text{Cosec. } A + \text{Cot. } A) \cdot (\text{Cosec. } A - \text{Cot. } A) = (DC)^2 = 1$.

XXVIII. Man weiß aus der Elementar-Geometrie, daß $\text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\text{Cos. } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{Sin. } 45^\circ = \text{Cos. } 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\text{Sin. } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$;

$\text{Cos. } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$. Man kann also leicht die Sinus und Cosinus der Hälfte dieser Winkel, die Hälfte dieser Hälften, und so weiter berechnen.

XXIX. Kennt man die zu einem Winkel A coordinirten Gröſſen, so findet man die dem Winkel $2 A$ coordinirten Gröſſen.

(Fig. 4.) Es sey $ACD = DCB = A$, so ist $ACB = 2 A$; da nun $BAG = A$, ferner $AB = 2 \text{ Sin. } A$ ist, so ist $AG = \text{Sin. } 2 A = AB$. $\text{Cos. } BAG = 2 \text{ Sin. } A \cdot \text{Cos. } A$. Ferner ist:

$CG = \text{Cos. } 2 A = CB - GB = 1 - AB$. $\text{Sin. } BAG = 1 - 2 \text{ Sin. } A \cdot \text{Sin. } A = 1 - 2 \text{ Sin. }^2 A = 2 \text{ Cos. }^2 A - 1 = \text{Cos. }^2 A - \text{Sin. }^2 A$; wenn man nämlich für $\text{Sin. }^2 A$, $1 - \text{Cos. }^2 A$ substituirt. Da man nun den Sinus und den Cosinus kennt, so kennt man auch die Tangente, und kann auf dieselbe Art $\text{Sin. } 4 A$, $\text{Sin. } 8 A$ etc. bestimmen. Gesetzt, man wollte den Cosinus des Winkels von 36° berechnen. Da

$\text{Sin. } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, so ist $2 \text{ Sin.}^2 18^\circ = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$, folglich:

$1 - \text{Sin.}^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \text{Cos. } 36^\circ$, also $\text{Sin. } 36^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{8}$,
und so weiter.

XXX. (Fig. 6.) In jeden rechtwinklichten Dreyecke kann man jede der drey Seiten als Radius betrachten, und dieser Voraussetzung gemäß das Verhältniß der zwey anderen Seiten bestimmen.

In dem Dreyecke BCD (Fig. 6.) betrachte man die Hypothenuse BC als Radius, so ist $BD = BC \text{ Sin. } BCD = BC \text{ Cos. } CBD$; $DC = BC \text{ Cos. } BCD = BC \text{ Sin. } CBD$.

(Fig. 6) Betrachtet man aber die eine der Catheten als Radius, so ist die andere die Tangente, und die Hypothenuse ist die Secante des anliegenden, die Cotangente, und die Cosecante des gegenüberliegenden. Im Dreyecke GFC sey GC als Radius angenommen, so ist $GF = GC \text{ Tang. } FCG$, $= GC \text{ Cot. } CFG$, ferner $FC = GC \text{ Sec. } FCG = GC \text{ Cosec. } CFG$.

Bey der trigonometrischen Bestimmung dieser Gröfsen kömmt es also wesentlich darauf an, welche der drey Seiten man als Radius betrachtet, und auf welchen der beyden spitzen Winkel man die Relation beziehet. In dieser Verwechslung der Relationen muß man die Anfänger üben; denn sie haben Mühe sich darin zurecht zu finden.

XXXI. Kennt man $\text{Sin. } A$, $\text{Cos. } A$, $\text{Sin. } 2 A$, $\text{Cos. } 2 A$, so findet man $\text{Sin. } 3 A$, $\text{Cos. } 3 A$.

Es sey (Fig. 7) $Ab = ba = aB = A$, so ist $ACB = 3 A$; $AD = DH = \text{Sin. } 3 A$, $CD = \text{Cos. } 3 A$.

(Fig. 7.) Man nehme $BE = Ba = A$, und ziehe die Sehnen EL, HM parallell mit dem Diameter BK, dann die senkrechten EG, CP, und die Sehne AL, so ist $EG = CP = \text{Sin. } A$; $EP = PL = \text{Cos. } A$; $EL = AL = 2 \text{ Cos. } A$, und somit der Winkel $ALE = 2 A$, denn er hat den halben Bogen $AE = 4 A$ zum Maafse.

Nun ist $AD = \sin. 3 A = AF - DF = AE - GE.$

Es ist aber $AF = AL \sin. ALE. = 2 \cos. A. \sin. 2 A$, also ist $AD = \sin. 3 A = 2 \cos. A \sin. 2 A - \sin. A.$

$DC = FP = \cos. 3 A = FL - PL = \frac{1}{2} AL. \cos. ALE. - PL$, also ist $CD = \cos. 3 A = 2 \cos. A. \cos. 2 A - \cos. A.$

XXXII. Auf diese Weise findet man den Sinus und den Cosinus jedes Winkels, der ein Multiplum von A ist, oder $\sin. nA$, und $\cos. nA$.

(Fig. 8.) Es sey (Fig. 8.) der Winkel $ACB = 7 A$, $AD = \sin. 7 A$, $CD = \cos. 7 A$.

Man nehme $BN = 7 A$, $BH = 5 A$, und ziehe die Sehnen HM , NR parallell mit dem Diameter BK , dann den Diameter AR , und die Sehne AM , so ist der Winkel $AMH = 6 A$, dann er hat $\frac{(AB + BH)}{2}$ zum Maafse; und es ist $AM = 2 \cos. A$.

Nun ist :

$$AD = \sin. 7 A = AK - DK = AM. \sin. AMH - DK = 2 \cos. A \sin. 6 A - \sin. 5 A.$$

$$DC = \cos. 7 A = MK - SM = AM. \cos. AMH - SM = 2 \cos. A \cos. 6 A - \cos. 5 A.$$

Also ist überhaupt:

$$\sin. n A = 2 \cos. A. \sin. (n - 1) A - \sin. (n - 2) A.$$

$$\cos. n A = 2 \cos. A. \cos. (n - 1) A - \cos. (n - 2) A.$$

Es ist demnach die Reihe der in arithmetischer Progressionen wachsenden Winkel so geartet, daß man $\sin. (nA)$, $\cos. (nA)$ findet, wenn man Sinus und $\cos. (n - 1) A$ mit $2 \cos. A$ multipliziert, und von dem Produkte Sinus und $\cos. (n - 2) A$ abzieht.

Die Sinus und Cosinus bilden demnach eine rekurirende Reihe, deren Relations - Skala $2 \cos. A$ und (-1) ist; wie aus dem Folgenden erhellet:

$$\begin{aligned}
 \text{Sin. } 0 \ A &= 0. \\
 \text{Sin. } 1 \ A &= 1 \text{ Sin. } A. \\
 \text{Sin. } 2 \ A &= 2 \text{ Cos. } A \text{ Sin. } A - 0. \\
 \text{Sin. } 3 \ A &= (4 \text{ Cos. }^2 A - 1) \text{ Sin. } A. \\
 \text{Sin. } 4 \ A &= (8 \text{ Cos. }^3 A - 4 \text{ Cos. } A) \text{ Sin. } A. \\
 \text{Sin. } 5 \ A &= (16 \text{ Cos. }^4 A - 12 \text{ Cos. }^2 A + 1) \text{ Sin. } A. \\
 \text{Sin. } 6 \ A &= (32 \text{ Cos. }^5 A - 32 \text{ Cos. }^3 A + 6 \text{ Cos. } A) \text{ Sin. } A. \\
 \text{Sin. } 7 \ A &= (64 \text{ Cos. }^6 A - 80 \text{ Cos. }^4 A + 24 \text{ Cos. }^2 A - 1) \text{ Sin. } A. \\
 \text{Sin. } 8 \ A &= (128 \text{ Cos. }^7 A - 192 \text{ Cos. }^5 A + 80 \text{ Cos. }^3 A - 8 \text{ Cos. } A) \text{ Sin. } A. \\
 \text{Sin. } 9 \ A &= (256 \text{ Cos. }^8 A - 448 \text{ Cos. }^6 A + 240 \text{ Cos. }^4 A - 40 \text{ Cos. }^2 A + 1) \text{ Sin. } A. \\
 &\text{und so weiter.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cos. } 0 \ A &= 0 \\
 \text{Cos. } 1 \ A &= 1 \text{ Cos. } A. \\
 \text{Cos. } 2 \ A &= 2 \text{ Cos. }^2 A - 1. \\
 \text{Cos. } 3 \ A &= 4 \text{ Cos. }^3 A - 3 \text{ Cos. } A. \\
 \text{Cos. } 4 \ A &= 8 \text{ Cos. }^4 A - 8 \text{ Cos. }^2 A + 1. \\
 \text{Cos. } 5 \ A &= 16 \text{ Cos. }^5 A - 20 \text{ Cos. }^3 A + 5 \text{ Cos. } A. \\
 \text{Cos. } 6 \ A &= 32 \text{ Cos. }^6 A - 48 \text{ Cos. }^4 A + 18 \text{ Cos. }^2 A - 1. \\
 \text{Cos. } 7 \ A &= 64 \text{ Cos. }^7 A - 112 \text{ Cos. }^5 A + 56 \text{ Cos. }^3 A - 7 \text{ Cos. } A. \\
 \text{Cos. } 8 \ A &= 128 \text{ Cos. }^8 A - 256 \text{ Cos. }^6 A + 160 \text{ Cos. }^4 A - 32 \text{ Cos. }^2 A + 1. \\
 \text{Cos. } 9 \ A &= 256 \text{ Cos. }^9 A - 576 \text{ Cos. }^7 A + 432 \text{ Cos. }^5 A - 120 \text{ Cos. }^3 A + 9 \text{ Cos. } A. \\
 &\text{und so weiter.}
 \end{aligned}$$

Wollte man $\text{Cos. } 10 \ A$, so multiplizire man $\text{Cos. } 9 \ A$ mit $2 \text{ Cos. } A$, und ziehe $\text{Cos. } 8 \ A$ vom Produkte ab.

Um $\text{Sin. } nA$ zu berechnen muß man demnach alle Sinus von 1 bis n berechnen, wenn man $\text{Sin. } A$ haben will. Man verlangt also eine allgemeine Gleichung, mittels welcher man unmittelbar Sinus und Cosinus nA bestimmen könne.

XXXIV. Betrachtet man die Glieder dieser Reihen, so sieht man, daß $\text{Sin. } A$ der gemeinschaftliche Faktor aller Sinus sey, daß wenn n das

gesuchte Glied bedeutet $(n - 1)$ der höchste Exponent von $\text{Cos. } A$ im ersten Gliede sey, und dieser Exponent immer um 2 abnehme.

In der Reihe der Cosinus ist n der höchste Exponent des ersten Gliedes und dieser Exponent nimmt bey jedem Gliede um 2 ab.

Hierdurch ist demnach auch die Zahl der Glieder bestimmt.

Endlich wechseln die Zeichen $(+)$ $(-)$ bey jedem Gliede ab; es bleiben also nur die Coefficienten zu bestimmen.

Der Coefficient des ersten Gliedes ist (2^{n-1}) . Mit diesem dividire man alle Glieder, so hat man:

$$\text{Sin. } A = \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 2 A = 2 (\text{Cos. } A - \frac{0}{2}) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 3 A = 4 (\text{Cos. }^2 A - \frac{1}{4}) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 4 A = 8 (\text{Cos. }^3 A - \frac{3}{4} \text{Cos. } A) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 5 A = 16 (\text{Cos. }^4 A - \frac{5}{4} \text{Cos. }^2 A + \frac{1}{16}) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 6 A = 32 (\text{Cos. }^5 A - \frac{5}{4} \text{Cos. }^3 A + \frac{3}{16} \text{Cos. } A) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 7 A = 64 (\text{Cos. }^6 A - \frac{5}{4} \text{Cos. }^4 A + \frac{5}{16} \text{Cos. }^2 A - \frac{1}{64}) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 8 A = 128 (\text{Cos. }^7 A - \frac{7}{4} \text{Cos. }^5 A + \frac{7}{16} \text{Cos. }^3 A - \frac{7}{64} \text{Cos. } A) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Sin. } 9 A = 256 (\text{Cos. }^8 A - \frac{7}{4} \text{Cos. }^6 A + \frac{7}{16} \text{Cos. }^4 A - \frac{7}{64} \text{Cos. }^2 A + \frac{1}{256}) \text{Sin. } A.$$

$$\text{Cos. } A = \text{Cos. } A.$$

$$\text{Cos. } 2 A = 2 (\text{Cos. }^2 A - \frac{1}{4})$$

$$\text{Cos. } 3 A = 4 (\text{Cos. }^3 A - \frac{3}{4} \text{Cos. } A)$$

$$\text{Cos. } 4 A = 8 (\text{Cos. }^4 A - \frac{5}{4} \text{Cos. }^2 A + \frac{1}{16})$$

$$\text{Cos. } 5 A = 16 (\text{Cos. }^5 A - \frac{5}{4} \text{Cos. }^3 A + \frac{5}{16} \text{Cos. } A)$$

$$\text{Cos. } 6 A = 32 (\text{Cos. }^6 A - \frac{9}{4} \text{Cos. }^4 A + \frac{9}{16} \text{Cos. }^2 A - \frac{1}{64})$$

$$\text{Cos. } 7 A = 64 (\text{Cos. }^7 A - \frac{7}{4} \text{Cos. }^5 A + \frac{7}{16} \text{Cos. }^3 A - \frac{7}{64} \text{Cos. } A)$$

$$\text{Cos. } 8 A = 128 (\text{Cos. }^8 A - \frac{8}{4} \text{Cos. }^6 A + \frac{8}{16} \text{Cos. }^4 A - \frac{8}{64} \text{Cos. }^2 A + \frac{1}{256})$$

$$\text{Cos. } 9 A = 256 (\text{Cos. }^9 A - \frac{9}{4} \text{Cos. }^7 A + \frac{9}{16} \text{Cos. }^5 A - \frac{9}{64} \text{Cos. }^3 A + \frac{9}{256} \text{Cos. } A)$$

Hieraus offenbaret sich, daß die Coefficienten aus den figurirten Zahlen entstehen. Es sey $n = 9$, so ist der Coefficient von $\text{Cos. }^8 A = 2^{n-1}$,

und folglich:

das erste Glied, (was immer n bedeute) $= 2^{n-1} \cdot \text{Cos.}^{n-1} A \cdot \text{Sin. } A$.

Der Coefficient des zweyten Gliedes ist: $256 \cdot \frac{7}{4}$, also, wenn $n = 9$, so ist das 2te Glied $= (n-2) \cdot 2^{n-3} \text{Cos.}^{n-3} A \cdot \text{Sin. } A$.

Der Coefficient des dritten Gliedes ist $\frac{15}{16} \cdot 256$. Nun ist 15 die fünfte Trigonal - Zahl, also da $9 = n$, so ist: $15 = \frac{n-3 \cdot n-4}{2}$ und somit das 3te Glied $= 2^{n-5} \cdot \frac{n-3 \cdot n-4}{2} \text{Cos.}^{n-5} A \cdot \text{Sin. } A$.

Der Coefficient des vierten Gliedes ist $\frac{10}{8} \cdot 256$. Nun ist 10 das dritte Glied der Zahlen der 4ten Ordnung, also da $9 = n$, so ist

$$\frac{10 = n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{2 \cdot 3}, \text{ also ist der Coefficient dieses Gliedes}$$

$$= 2^{n-7} \cdot \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{2 \cdot 3}, \text{ folglich das Glied selbst}$$

$$= 2^{n-7} \cdot \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{2 \cdot 3} \text{Cos.}^{n-7} A \cdot \text{Sin. } A.$$

Führt man auf diese Weise fort, so findet man das 5te Glied, wie folgt: $2^{n-9} \cdot \frac{n-5 \cdot n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{Cos.}^{n-9} A \cdot \text{Sin. } A$.

Man erkennt nun das Gesetz, nach welchem die Coefficienten fortschreiten, und ordnet man die Glieder, so hat man:

$$\begin{aligned} \text{Sin. } n A &= (2^{n-1} \cdot \text{Cos.}^{n-1} A - (n-2) \cdot 2^{n-3} \text{Cos.}^{n-3} A \\ &+ \frac{n-3 \cdot n-4}{2} 2^{n-5} \text{Cos.}^{n-5} A - \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{2 \cdot 3} 2^{n-7} \text{Cos.}^{n-7} A \\ &+ \frac{n-5 \cdot n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9} \text{Cos.}^{n-9} A \\ &- \frac{n-6 \cdot n-7 \cdot n-8 \cdot n-9 \cdot n-10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2^{n-11} \text{Cos.}^{n-11} A \dots) \text{Sin. } A. \end{aligned}$$

D

Bey Bestimmung der Cosinuse hat man für die Coefficienten der zweyten Glieder die Zahlen der arithmetischen Reihe. 2, 3, 4. n . Die Summen dieser Zahlen geben die Coefficienten der dritten Glieder, und so weiter. Man hat also; $\text{Cos. } n. A. = 2^{n-1} \text{Cos. } A - n. 2^{n-3} \text{Cos. }^{n-2} A + \frac{n. n-3. 2^{n-5} \text{Cos. }^{n-4} A - n. n-4. n-5. 2^{n-7} \text{Cos. }^{n-6} A}{2} + \frac{n. n-5. n-6. n-7. 2^{n-9} \text{Cos. }^{n-8} A - n. n-6. n-7. n-8. n-9. 2^{n-11} \text{Cos. }^{n-10} A}{2. 3. 4} \dots$

1te Erinnerung. Die Anfänger haben Mühe sich in der algebraischen Bezeichnung der Coefficienten zu finden, wenn sie nicht in der Theorie der figurirten Zahlen, und in der Summirungs - Methode arithmetischer Reihen von verschiedenen Ordnungen eingeübt sind. Dieser Gegenstand wird in den Lehrbüchern sehr oberflächlich behandelt. Man scheint die Wichtigkeit dieser Combinationen nicht hinreichend einzusehen.

2te Erinnerung. Berechnet man die Coefficienten nach den obigen Formeln, so ist ein Rechnungs - Fehler leicht möglich; allein er wird leicht zu entdecken seyn, wenn man auf die folgende Bemerkung Rücksicht nimmt. Zieht man die Summe der Coefficienten der geraden Glieder von der Summe der Coefficienten der ungeraden ab, so ist diese Differenz bey den Sinus $= n$, bey den Cosinus $= 1$.

3te Erinnerung. Aus der Betrachtung und Combinirung der obigen Gleichungen für den Sinus und Cosinus $n A$ lassen sich manche neue Verhältnisse ableiten, deren einige in der Folge vorkommen werden. Es können z. B. die Coefficienten von $\text{Cos. } n A$ aus den Coefficienten von $\text{Sin. } n A$ und $\text{Sin. } (n-1) A$ bestimmt werden, denn es ist: $\text{Cos. } n A = \text{Sin. } n A \text{ Cot. } A - \text{Sin. } (n-1) A \text{ Cosec. } A$.

XXXV. So wie wir Sinus und $\text{Cos. } n A$ durch die vorhergehenden bestimmt haben, so kann man auch die Tangente von $n A$ aus $\text{Tang. } A$ und $\text{Tang. } (n-1) A$ entwickeln, denn es ist:

$$\text{Tang. } n A = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } (n-1) A}{1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } (n-1) A}.$$

Beweis. Es sey (Fig. 9.) $\angle BCI = n A$, so ist $\angle ACB = (n-1) A$.

Man ziehe zum Punkte A eine Tangente, so ist $DA = \text{Tang. } A$, $AE = \text{Tang. } (n-1) A$, also $DE = \text{Tang. } A + \text{Tang. } (n-1) A$.

Man ziehe AF senkrecht auf CB, und verlängere sie rückwärts.

Durch D ziehe man eine Parallele mit AC. Sie schneidet die Axe in K, die verlängerte AF in G, und es ist $KG = AC = 1$.

Der Winkel $\angle DAG = \angle FAE = (n-1) A$, also ist $DG = DA$. $\text{Tang. } \angle DAG = \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } (n-1) A$, und $KD = 1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } (n-1) A$.

Im Trapez DKCE sind in D und C rechte Winkel, und da die Winkel DCE und DKE auf derselben Sehne im Kreise stehen, so ist $\angle DKE = \angle DCE = n A$.

In G errichte man eine senkrechte, welche die verlängerte KE in L schneidet; dann ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke: $KG : GL = KD : DE$ oder $1 : \text{Tang. } n A = 1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } (n-1) A : \text{Tang. } A + \text{Tang. } (n-1) A$. also:

$$\text{Tang. } n A = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } (n-1) A}{1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } (n-1) A}.$$

XXXVI. Setzt man $n=2$. so ist: $\text{Tang. } 2 A = \frac{2 \text{Tang. } A}{1 - \text{Tang. }^2 A}.$

Setzt man $n=3$, so ist: $\text{Tang. } 3 A = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } 2 A}{1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } 2 A}.$

Substituirt man für $\text{Tang. } 2 A$ dessen Werth, so hat man $\left. \begin{array}{l} \text{Tang. } 3 A = \frac{3 \text{Tang. } A - \text{Tang. }^3 A}{1 - 3 \text{Tang. }^2 A} \end{array} \right\}$

Ebenso findet man: $\text{Tang. } 4 A = \frac{4 \text{Tang. } A - 4 \text{Tang. }^3 A}{1 - 6 \text{Tang. }^2 A + \text{Tang. }^4 A}.$

$$\text{Tang. } 5 A = \frac{5 \text{Tang. } A - 10 \text{Tang. }^3 A + \text{Tang. }^5 A}{1 - 10 \text{Tang. }^2 A + 5 \text{Tang. }^4 A}.$$

So findet man $\text{Tang. } 6 A$; aber der geübte Rechner sieht bald, daß die Glieder im Zähler und im Nenner die des Binonimus $(1 + \text{Tang. } A)^n$ seyen. Denn $(1 + \text{Tang. } A)^7 = 1 + 7 \text{Tang. } A + 21 \text{Tang.}^2 A + 35 \text{Tang.}^3 A + 21 \text{Tang.}^4 A + 7 \text{Tang.}^5 A + \text{Tang.}^6 A + \text{Tang.}^7 A$ und $\text{Tang. } 7 A = \frac{7 \text{Tang. } A - 35 \text{Tang.}^3 A + 21 \text{Tang.}^5 A - \text{Tang.}^7 A}{1 - 21 \text{Tang.}^2 A + 35 \text{Tang.}^4 A - 7 \text{Tang.}^6 A}$.

Die Glieder und die Coeffizienten sind dieselben, nur haben die Glieder im Zähler und im Nenner abwechselnd die Zeichen $(+)$ $(-)$, also ist im allgemeinen:

$$\text{Tang. } nA = \frac{n \text{Tang. } A - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} \text{Tang.}^3 A + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \text{Tang.}^5 A}{1 - \frac{n \cdot n-1}{2} \text{Tang.}^2 A + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{Tang.}^4 A \dots}$$

XXXVII. Wenn man die Sinus und Cosinus zweyer Winkel A und B kennt, welche keine geraden Multiplen von einander sind, so findet man alle zu ihrer Summe und ihrer Differenz, ihrer halben Summe und ihrer halben Differenz coordinirten trigonometrischen Gröſſen.

Note. »(Zu Vermeidung aller Zweydeutigkeiten, welche nur zu oft aus der Unbestimmtheit der Beziehung herrühren, wird ein- für allemal erinnert, daß A immer den gröſſeren der zwey Winkel A und B bedeute.)«

XXXVIII. (Fig. 10.) (Es sey $\angle ACK = A$; $\angle ACB = B$, so ist $\angle BCK = (A + B)$. Diesemnach ist $AD = \text{Sin. } A$; $CD = \text{Cos. } A$; $BE = \text{Sin. } B$; $CE = \text{Cos. } B$. Man soll $BF = \text{Sin. } (A + B)$; $CF = \text{Cos. } (A + B)$ durch diese gegebenen Gröſſen bestimmen.

Es ist $BF = BH + HF$; $CF = CG - FG$, wenn HE mit CK parallel ist.

Nun ist $HF = EG = CE \text{ Sin. } \angle ACK = \text{Cos. } B \text{ Sin. } A$; und da der Winkel $\angle EBH = \angle ACK = A$ ist, so ist $BH = BE \text{ Cos. } \angle EBH = \text{Sin. } B \text{ Cos. } A$, also ist:

1.) $BF = HF + BH = \sin. A \cos. B + \sin. B \cos. A$. Ferner ist:
 $CG = CE \cos. ACK = \cos. B \cos. A$; $FG = EH = BE \sin. EBH = \sin. B \sin. A$, also:

2.) $CF = CG - FG = CG - EH = \cos. B \cos. A - \sin. B \sin. A$.

XXXIX. Es sey $PCR = A$; $PCQ = B$, so ist $QCR = (A - B)$; $QS = \sin. B$, $CS = \cos. B$, $PV = \sin. A$; $CV = \cos. A$. Man sucht $QU = \sin. (A - B)$; $CU = \cos. (A - B)$.

Man ziehe QT mit CR paralell, so ist $QU = SX - ST$, $CU = CX + QT = CX + UX$. Da der Winkel $QST = A$ ist, so ist: $ST = QS \cos. QST = \sin. B \cos. A$; ferner $SX = CS \sin. PCR = \cos. B \sin. A$, also ist:

3.) $QU = SX - ST = \sin. A \cos. B - \sin. B \cos. A$. Ferner ist
 $CX = CS \cos. PCR = \cos. B \cos. A$; $UX = QT = QS \sin. QST = \sin. B \sin. A$, also:

4.) $CU = CX + UX = \cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B$. Diesemnach ist:

1.) $\sin. (A + B) = \sin. A \cos. B + \sin. B \cos. A$

2.) $\sin. (A - B) = \sin. A \cos. B - \sin. B \cos. A$

3.) $\cos. (A + B) = \cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B$

4.) $\cos. (A - B) = \cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B$.

Erinnerung. Diese Gleichungen setzen voraus, daß A , B , und $(A - B)$ spitze Winkel seyen. Wenn $(A + B)$ stumpf ist, so ist in der dritten Gleichung $\sin. A \sin. B$ größer, als $\cos. A \cos. B$. Sind A und B stumpf, so haben ihre Cosinus eine entgegengesetzte Lage, und somit muß $(+)$ in $(-)$ verwandelt werden.

Doch ist diese Weisung, die Zeichen umzukehren eine mechanische Anweisung, die in manchen Fällen die Zweydeutigkeit nicht aufhebt. Die Konstruktion weist uns immer unfehlbar zu Recht.

XXXX. Die Tangente ist gleich dem Sinus durch den Cosinus dividirt, also:

$$\text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Sin. } (A + B)}{\text{Cos. } (A + B)} = \frac{\text{Sin. } A \cdot \text{Cos. } B + \text{Sin. } B \cdot \text{Cos. } A}{\text{Cos. } A \cdot \text{Cos. } B - \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B}$$

$$\text{Tang. } (A - B) = \frac{\text{Sin. } (A - B)}{\text{Cos. } (A - B)} = \frac{\text{Sin. } A \cdot \text{Cos. } B - \text{Sin. } B \cdot \text{Cos. } A}{\text{Cos. } A \cdot \text{Cos. } B + \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B}$$

Dividiret man den Zähler und den Nenner dieser Fraktionen durch $\text{Cos. } A \cdot \text{Cos. } B$, so hat man:

$$\text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } B}{1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B}$$

$$\text{Tang. } (A - B) = \frac{\text{Tang. } A - \text{Tang. } B}{1 + \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B}$$

Man kennt also auch die Cotangenten.

1ter Zusatz. Diese Formeln können auch aus der 9ten Figur durch Construction entwickelt werden. Man setze nämlich $ACB = A$; $ACI = B$, und verfähre wie in Nro. XXXV. gezeigt wurde, so ist:

$$DE = \text{Tang. } A + \text{Tang. } B; \quad DG = \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B; \quad KD = 1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B.$$

Der Winkel $DKE = DCE = (A + B)$; also:

$$GL = KG. \text{Tang. } GKL = \text{Tang. } (A + B), \text{ folglich: } KG : GL = KD : DE, \text{ oder } 1 : \text{Tang. } (A + B) = 1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B : \text{Tang. } A + \text{Tang. } B.$$

$$\text{also: } \text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } B}{1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B}$$

2ter Zusatz. Man ziehe EP senkrecht auf GL, so ist $EP = DG = \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B$, und da der Winkel $PEL = GKL = (A + B)$ ist, so ist $PL = \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B \cdot \text{Tang. } (A + B)$.

Nun ist $PL = GL - GP = GL - DE = \text{Tang. } (A + B) - (\text{Tang. } A + \text{Tang. } B)$, also ist: $\text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B \cdot \text{Tang. } (A + B) = \text{Tang. } (A + B) - (\text{Tang. } A + \text{Tang. } B)$

Ebenso findet man:

$$\text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B \cdot \text{Tang. } (A - B) = \text{Tang. } A - (\text{Tang. } B + \text{Tang. } (A - B))$$

XXXXI, Es sey (Fig. 11.) der Winkel $ACB = BCH = A$; der Winkel $BCD = B$, so ist der Winkel $DCH = (A - B)$, und $ACD = (A + B)$.

Durch D ziehen DN parallel mit dem Diameter, und $DF = CP = LN$ senkrecht auf denselben; da nun $AE = \text{Sin. } A = EH$ ist, so ist $AG = AE + EG = AE + FD = \text{Sin. } A + \text{Sin. } B$; $HG = HE - FD = \text{Sin. } A - \text{Sin. } B$.

Da $CE = \text{Cos. } A$; $CF = PD = PN = \text{Cos. } B$ ist, so ist $NG = \text{Cos. } B + \text{Cos. } A$, $DG = PD - PG = \text{Cos. } B - \text{Cos. } A$.

Man ziehe die Sehnen $AD = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (A + B)$; $HD = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (A - B)$; $HN = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (90^\circ - (A + B)) = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{2} (A + B)$, $AN = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (90^\circ - (A - B)) = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{2} (A - B)$. Diesemnach ist:

$$AG = \text{Sin. } A + \text{Sin. } B = AD \text{ Cos. } DAG = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (A + B) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} (A - B).$$

$$GH = \text{Sin. } A - \text{Sin. } B = DE \text{ Cos. } DHA = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (A - B) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} (A + B).$$

$$GN = \text{Cos. } B + \text{Cos. } A = NH \text{ Cos. } DNH = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{2} (A + B) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} (A - B).$$

$$GD = \text{Cos. } B - \text{Cos. } A = DH \text{ Sin. } DHA = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (A - B) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2} (A + B).$$

XXXXII. Es ist:

$$GN : GA = 1 : \text{Tang. } AND, \text{ oder } GN : \text{Sin. } A + \text{Sin. } B = 1 : \text{Tang. } \frac{1}{2} (A + B).$$

$$GN : GH = 1 : \text{Tang. } DNH, \text{ oder } GN : \text{Sin. } A - \text{Sin. } B = 1 : \text{Tang. } \frac{1}{2} (A - B),$$

$$\text{also: } \frac{\text{Sin. } A + \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A - \text{Sin. } B} = \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Tang. } \frac{1}{2} (A - B)}$$

$$\text{folglich: } \text{Sin. } A + \text{Sin. } B : \text{Sin. } A - \text{Sin. } B = \text{Tang. } \frac{1}{2} (A + B) : \text{Tang. } \frac{1}{2} (A - B).$$

das ist: die Summe der Sinus zweyer Winkel verhält sich zur Differenz dieser Sinus, wie die Tangente der halben Summe dieser Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

XXXXIII. Es sey (Fig. 12.) $AD = 2 A$; $DE = 2 B$, so ist der Bogen $AE = 2 (A + B)$, also ist der Winkel $AED = A$; $EAD = B$; $ADE = 180^\circ - (A + B)$, folglich die Sehne $AD = 2 \text{ Sin. } A$; die Sehne $ED = 2 \text{ Sin. } B$; die Sehne $AE = 2 (\text{Sin. } A + \text{Sin. } B)$.

Man ziehe den Diameter SB senkrecht auf AE; die Sehne DL parallel mit demselben; die Sehne DK parallel mit AE, so ist $DK = 2 \sin. (A - B)$, $DH = GF = \sin. (A - B)$. Diesemnach ist:

$$\begin{aligned} AG &= AF + GF = \sin. (A+B) + \sin. (A-B) = AD \cos. DAE = 2 \sin. A \cos. B, \\ EG &= EF - GF = \sin. (A+B) - \sin. (A-B) = DE \cos. DEA = 2 \sin. B \cos. A, \\ LG &= LV + VG = \cos. (A-B) + \cos. (A+B) = LE \cos. ELD = 2 \cos. A \cos. B, \\ DG &= VD - VG = \cos. (A-B) - \cos. (A+B) = DE \sin. DEA = 2 \sin. B \sin. A. \end{aligned}$$

XXXXIV. Mit $DE = 2 \sin. B$ beschreibe man einen Kreis, und durch D ziehe man $AU = 2 (\sin. A + \sin. B)$, so ist $DT = 2 (\sin. A - \sin. B)$, und da $GR = GE = 2 \sin. B \cos. A$ ist, so ist $AE - RE = 2 \sin. (A + B) - 4 \sin. B \cos. A = 2 \sin. (A - B)$.

Man weiß aus den Elementen, daß $AU : AE = AR : AT$ sey, also ist $\sin. A + \sin. B : \sin. (A + B) = \sin. (A - B) : \sin. A - \sin. B$, daß ist, die Summe der Sinus zweyer Winkel verhält sich zum Sinus ihrer Summe, wie der Sinus ihrer Differenz sich verhält zur Differenz ihrer Sinus.

XXXXV Alle diese Verhältnisse, sind aus der Betrachtung und Vergleichung der Sehnen eines Kreises, dessen Radius die Einheit ist, entwickelt worden. Ueberträgt man sie auf einen Kreis vom Radius r , so findet man jede zu einem Punkte desselben coordinirte Gröfse, indem man die ähnliche coordinirte des Einheits - Kreises mit r multiplirte.

Um jedes Dreyeck kann ein Kreis beschrieben werden, so daß die Seiten Sehnen des Kreises, und die Winkel Winkel an der Peripherie seyen. Es haben also die drey Winkel zusammen die halbe Peripherie zum Maafse, und jeder Winkel den halben Bogen, den die zwey anliegenden Seiten ausspannen:

(Fig. 13.) Kennt man demnach den Radius MA, und zwey Winkel $CAB = A$, $CBA = B$, so kennt man alle übrigen coordinirten Gröfsen, und es ist: $CB = 2 r \sin. A$; $CA = 2 r \sin. B$; $AB = 2 r \sin. A + B$, $CE = 2 r \sin. A \sin. B$; $AE = 2 r \sin. B \cos. A$; $BE = 2 r \sin. A \cos. B$.

XXXXVI. Man verlägere CE nach D, und ziehe die Sehnen AD, BD, so ist $DE = 2r \cos. A \cos. B$; $AD = 2r \cos. A$; $BD = 2r \cos. B$; $CD = 2r \cos. (A - B)$

Man mache $EK = AF$, so ist $KB = 2r \sin. A - B$.

Man ziehe die senkrechten AG, BH, so ist $BH = 2r \sin. A \sin. (A + B)$; $AG = 2r \sin. B \sin. (A + B)$.

Man nehme $FE = DE$, und ziehe BF, und AF, so ist der Winkel $FAE = BAD = (90 - B)$, also fällt die Verlängerung von AF senkrecht auf CB. Der Winkel $FBA = (90 - A)$, also ist die Verlängerung von BF senkrecht auf AC.

Hieraus folgt, daß die drey senkrechten Linien, welche von der Spitzen des Dreyecks auf die gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, sich in einem Punkte F schneiden, und es ist:

$FE = 2r \cos. A \cos. B$; $FG = 2r \cos. B \cos. (A + B)$; $FH = 2r \cos. A \cos. (A + B)$
 $FC = 2r \cos. (A + B)$; $FB = 2r \cos. B = BD$; $FA = 2r \cos. A = AD$.

Die Summe der drey Seiten ist $= 2r (\sin. A + \sin. B + \sin. (A + B))$

Der Flächen - Inhalt $= \frac{AB \cdot CE}{2} = 2r^2 \sin. A \sin. B \sin. (A + B)$.

2

Erinnerung. Es ist durchaus nothwendig, daß sich der Anfänger in die Lage und die Verhältnisse dieser jedem Dreyecke coordinirten Größen wohl einstudiere. Die Kenntniß derselben erleichtert ungemein die Berechnung, und setzt den Rechner in den Stand, die gesuchten Größen durch die Logarithmen zu bestimmen. Wer in der Algebra bewandert ist, wird ferner erkennen, daß alle coordinirten Größen durch Gleichungen bestimmt werden, in denen nie mehr als drey Faktoren sind, und also alle zu einem Dreyecke coordinirten Größen bestimmt werden können, wenn drey derselben gegeben sind.

Allein es ist nicht genug, daß der Geometer sein Dreyeck berechnen könne; er muß im Stande seyn, dasselbe mit Zirkel und Lineal, ohne Tafeln, und ohne Transporteur mit einer für die Praxis hinreichenden

Genauigkeit zu construiren. Der Artillerie, der Genie - Offizier hat ja nicht immer seine Bagage bey sich.

2te Erinnerung. Zu Berechnung der Dreyecke bedient man sich der Tafeln der natürlichen Sinus etc. und auch ihrer Logarithmen. In den Tafeln der natürlichen Sinus setzt man den Radius gleich 100000, und dieser Voraussetzung gemäß sind die Sinus, Cosinus etc in Theilen des Radius berechnet. Es müssen also von jeder in den Tafeln gegebenen trigonometrischen Größe 5 Zahlen durch das Comma abgeschnitten werden, damit sie für den Radius 1 passe. Gesetzt man hätte $2r \sin. A$, $\sin. B$ zu berechnen, und es wäre $2r = 500$. $A = 35^\circ$, $B = 48^\circ$, so geben die Tafeln: $\sin. A = 57357,64$, $\sin. B = 74314,48$, für den Radius 100000, also, wenn der Radius $= 1$ gesetzt wird, so ist $\sin. A = 0,5735764$, $\sin. B = 0,7431448$. Das Produkt dieser zwey Größen multiplizire man mit 500, so hat man den gesuchten Werth.

XXXXVII, In den Tafeln der Logarithmen wird der Radius $= 10000$ Millionen angenommen, und somit ist sein Logarithmus $= 10$. Für diesen Werth des Radius sind alle trigonometrischen Größen berechnet. Sucht man also $\sin. A$ für den Radius 1, so findet man einen Logarithmus, der einer Zahl angehört, welcher 10000 Millionen größer ist, als die gesuchte. Man muß also von der Charakteristik des gefundenen Logarithmus 10 abziehen. Z. B. es sey $2r \sin. A$, $\sin. B = 500$. $\sin. 35^\circ \sin. 48^\circ$ durch die Logarithmen zu berechnen:

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2,6989700. \\ + \log. \sin. 35^\circ &= 9,7585913 - 10. \\ + \log. \sin. 48^\circ &= 9,8710735 - 10. \\ \log, 2r. \sin. A. \sin. B. &= 22,3286348 - 20 = 2,3286348. \end{aligned}$$

Man braucht also nur die erste 2 in der Charakteristik zu streichen. Gesetzt, man wollte $2r$ berechnen;

$$\begin{aligned} \sin. A. & \\ \log 500 &= 2,6989700. \\ - \log. \sin. 35^\circ &= 9,7585913. \\ \hline &9,9403787 - 10. \end{aligned}$$

Allein die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist 10000 Millionen male zu klein. Man addire also 10 zur Charakteristik.

XXXXVIII. Aufgabe. In einem Dreyecke sind die Winkel A, B , und die dem Winkel A gegenüberliegende Seite a gegeben. Man soll das Dreyeck bestimmen.

Auflösung. Da zwey Winkel gegeben sind, so ist der dritte $= 180^\circ - (A + B)$ auch gegeben. Die Seite $a = 2 r \sin. A$. Da nun a und $\sin. A$ gegeben sind, so kennt man $2 r = \frac{a}{\sin. A}$. Nun sey die dem Winkel B gegenüberliegende Seite $= b$, so ist:

$$b = 2 r \sin. B = \frac{a \sin. B}{\sin. A},$$

das ist, die Seiten verhalten sich wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Die übrigen coordinirten Gröſsen sind leicht zu bestimmen.

XXXXIX. Aufgabe. Im Dreyecke ABC (Fig. 13.) kennt man die Seiten und Winkel, folglich auch den Radius $r = CM$. Man verlängere CM bis sie die Sehne AB in P , die Periferie in R schneidet. Man will wissen, wie groſs die Segmente AP und BP seyen.

Auflösung. Man ziehe den Radius DM , welcher AB in S schneidet, so ist, $AP = BS$, und $AS = BP$; denn die Bögen AD und BR sind gleich. Die Dreyecke ACD, SBD sind ähnlich, denn der Winkel ACD und ABD sind gleich, weil sie denselben halben Bogen AD zum Maafse haben, und da der Bogen $BT = AC$ ist, so sind auch die Winkel CDA und SDB gleich. Es ist demnach:

$CD : AC = BD : BS$, oder $2 r \cos. A - B : 2 r \sin. B = 2 r \cos. B : BS$, also:

$$BS = AP = \frac{2 r \sin. B \cos. B}{\cos. (A - B)} = \frac{r \sin. 2 B}{\cos. (A - B)}$$

Die Dreyecke ASD und CBD sind auch ähnlich, denn die Winkel DAB und DCB haben den halben Bogen BD zum Maafse; auch sind die Winkel CBD und ASD gleich, weil $BT = AC$, und der Bogen $AC + AD = BT + AD$, also ist: $CD:CB = AD:AS$,
oder $2r \cos. (A - B): 2r \sin. A = 2r \cos. A: AS$, also:

$$AS = BP = \frac{2r \sin. A \cos. A}{\cos. (A - B)} = \frac{r \sin. 2A}{\cos. (A - B)}$$

Diesemnach findet man leicht MP und PR, da die Dreyecke CEB, und CDR ähnlich sind,

Erinnerung. Alle diese Formeln sind richtig, nur muß man immer bey der Berechnung die Figur vor Augen haben, denn sonst kömmt man auf negative Gröfsen, bey denen man sich nicht zurecht findet. Diesen Verirrungen, die Carnot sehr wohl bemerkte, suchte derselbe in seiner Geometrie de Position abzuhelpen, indem er den Vernunft widrigen Begriffen negativer Gröfsen, die Benennung *Quantité directe et inverse* substituirt, damit ist dem Uebel lange nicht abgeholfen, denn die Zeichen (+ —) bestimmen allein nicht, ob die *Quantité directe* oder *inverse* sey, und es kann die Lage der zu einem Punkte coordinirten Gröfsen nur durch die Construction bestimmt werden.

L. Aufgabe. (Fig. 14.) Zwey Seiten eines Dreyeckes, nämlich AC und BC sind nebst einem einer der beyden Seiten gegenüberliegenden Winkel sind gegeben. Man soll das übrige bestimmen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist bestimmt, oder unbestimmt, je nachdem der gegebene Winkel der gröfseren oder kleineren Seite gegenüber liegt.

Ist der der gröfsern Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist die Aufgabe vollkommen bestimmt, und es kann mit den gegebenen Gröfsen nur ein Dreyeck construirt werden. Auf der Linie BA construirt man einen Winkel dem gegeben gleich, und trage auf dessen zweyten Schenkel die gegebene kleinere Seite AC. Mit einer Zirkel-

Oeffnung gleich der grösseren der gegebenen Seiten durchschneide man die Basis in B, so ist ABC das gesuchte Dreyeck; und kein anderes möglich.

Ist der kleinere, das ist, der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, so construire man in B einen Winkel dem gegebenen Winkel gleich, trage auf den Schenkel die grössere Seite BC, und mit der kleineren Seite als Radius beschreibe man von C aus einen Kreis. Er wird die Basis in E und A schneiden, und somit sind zwey Dreyecke möglich, weil der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel stumpf oder spitz seyn kann.

Zu Berechnung des Dreyeckes bediene man sich des Verhältnisses der Sinus zu den Seiten, denn es ist immer:

$$a : b = \sin. A : \sin. B,$$

wobey immer a die grössere Seite, A den grösseren Winkel bedeutet. Sind nun a, b, A gegeben, so hat man:

$$\sin. B = \frac{b}{a} \sin. A; \text{ ist } a, b, B \text{ gegeben, so hat man } \sin. A = \frac{a}{b} \sin. B.$$

(Fig. 4.) Wird gefodert, dafs man durch die gegebenen Grössen die Basis AB bestimmen solle; so ziehe man die senkrechte PC, so hat man $CP = b \sin. A$; $AP = b \cos. A$; $BP = AB - b \cos. A$; also $a^2 = b^2 \sin.^2 A + AB^2 - 2 AB. b \cos. A + b^2 \cos.^2 A = b^2 + AB^2 - 2 AB. b \cos. A$; und wenn man das Quadrat suppliret; so hat man:

$$AB = b \cos. A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin.^2 A}.) \text{ Ist aber } B \text{ gegeben, so ist}$$

$$AB = a \cos. B + \sqrt{b^2 - a^2 \sin.^2 B}). \text{ oder}$$

$$BE = a \cos. B - \sqrt{b^2 - a^2 \sin.^2 B}).$$

Der doppelte Werth der Basis, wenn der kleinere Winkel gegeben ist, hängt also nicht vom Wurzel-Zeichen, sondern von der Unbestimmtheit der Aufgabe ab. Wäre in der Aufgabe bestimmt, dafs der Winkel A spitz seyn solle, so wäre nur ein Werth für die Basis möglich.

Da a grösser ist als b , so kann $b \sin. A$ niemals grösser seyn als a , aber $a \sin. B$ könnte grösser als b seyn, und somit wäre $b^2 - a^2 \sin.^2 B$ eine sogenannte negative Grösse, folglich $\sqrt{b^2 - a^2 \sin.^2 B}$, eine un-

mögliche Gröfse. In die Sprache des gesunden Menschen - Verstandes übersetzt, heifst dieses, es sey nicht möglich, mit den gegebenen Gröfsen ein Dreyeck zu construiren, weil dann der Kreis vom Radius b , die Basis weder schneidet, noch berührt.

Man vergesse nicht, dafs für eine gesuchte Unbekannte sich nur dann mehrere Werthe zeigen, wenn etwas Unbestimmtes in der Aufgabe liegt, und dafs negative, unmögliche Gröfsen sich nur dann als Resultate einer Rechnungs - Operation zeigen, wenn man ungereimte sich selbst widersprechende Daten angenommen hat.

Muster - Rechnung für die vorigen Aufgaben.

Es sey $a = 1400$, $b = 1244$. $A = 64^\circ$, also $\text{Sin. } B = \frac{b \cdot \text{Sin. } A}{a}$.

$$\log. 1244 = 3,0948204$$

$$\log. \text{Sin. } 64^\circ = 9,9536602$$

$$A = 64^\circ$$

$$\text{Comp. log. } 1400 = 6,8538720.$$

$$B = 53^\circ, 00', 2'', 515$$

$$\log. \text{Sin. } B = 9,9023526. \quad 180 - (A + B) = 62^\circ, 59', 57'', 485.$$

Man suche die dritte Seite $c = \frac{a \cdot \text{Sin. } (A + B)}{\text{Sin. } A} = 1400 \cdot \frac{\text{Sin. } 62^\circ, 59', 57'', 485}{\text{Sin. } 64^\circ}$.

$$\log. 1400 = 3,1461280.$$

$$\log. \text{Sin. } 62^\circ = 9,9498782.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } 64 = 0,0463398.$$

$$\log. c = 3,1423460.$$

$$c = 1387. 86.$$

In diesem Falle ist nur ein Dreyek möglich, weil der der gröfseren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist; wäre aber der Winkel B gegeben, so stünde die Rechnung, wie folgt:

$$\text{Sin. } A = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{b}$$

$$\log. 1400 = 3,1461280.$$

$$\log. \text{Sin. } B = 9,9023526.$$

$$\text{Comp. log. } 1244 = 6,9051796.$$

$$\log. \text{Sin. } A = 9,9536602, \text{ also } A = 64^\circ, \text{ oder } 116^\circ.$$

Ist $A = 64^\circ$ so findet man $c = 1387,86$, ist aber $A = 116^\circ$ so ist der 3te Winkel $= 180^\circ - 64^\circ - 53^\circ, 00', 2, 515 = 64^\circ - 53^\circ, 00' 2'', 515 = 10^\circ, 59', 57'', 485$. und

$$\begin{aligned} c &= \frac{1400. \sin. 10^\circ, 59', 57'', 485 \dots}{\sin. 64^\circ} \quad \log. 1400. = 3,1461280 \\ &\quad \log. \sin. 10^\circ = 9,2805755 \\ &\quad \text{Comp. log. sin. } 64^\circ = 0,0463398 \\ &\quad \log. c = 2,4730433, \quad c, 297,196 \end{aligned}$$

Die Differenz dieser zwey c beträgt $1090,69$, also ist $\sqrt{b^2 - a \sin.^2 B} = 545,34$, und $a \cos. B = 842,52$; $a \cos. B + \sqrt{b^2 - a^2 \sin.^2 B} = 1387,86$
 $a \cos. B - \sqrt{b^2 - a^2 \sin.^2 B} = 297,19$

Wäre A gegeben, so wäre $c = b \cos. A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin.^2 A}$, und die Gröfse unter dem Wurzelzeichen gröfser als $b \cos. A$; sie kann also nicht von $b \cos. A$ abgezogen werden, und $b \cos. A - \sqrt{b^2 - a^2 \sin.^2 B}$ ist unmöglich.

LI. Aufgabe. Die Basis AB (Fig. 14.) und die zwey anliegenden Winkel A, B sind gegeben. Man soll das Dreyeck bestimmen.

Auflösung. Die Konstruktion ist aus der Elementar-Geometrie bekannt. Da zwey Winkel gegeben sind, so kennt man auch den dritten C , welcher der gegebenen Seite AB gegenüberliegt. Man hat also:

$$\begin{aligned} BC &= \frac{AB \sin. A}{\sin. C}; \quad AC = \frac{AB \sin. B}{\sin. C}; \quad \text{die Höhe } CT = \frac{AB \sin. B \sin. A}{\sin. C} \\ \text{den Inhalt} &= \frac{(AB)^2 \sin. A \sin. B}{2 \sin. C} \end{aligned}$$

LII. Aufgabe. AC, AB , und der Winkel CAB sind gegeben.

Auflösung. Die Konstruktion ist aus den Elementen bekannt.

Durch die Berechnung kann direkte gesucht werden.

1mo. Die dritte Seite BC , 2° der Winkel CBA . 3° Beyde unbekannte Winkel zugleich.

1ter Fall. Es sey $AC = b$, $AB = c$, der Winkel $CAB = A$.

Diesemnach. ist $CP = b \sin. A$, $AP = b \cos. A$, also $BP = c - b \cos. A$,
folglich: $BC^2 = CP^2 + BP^2 = b^2 \sin.^2 A + c^2 - 2 b c \cos. A + b^2 \cos.^2 A =$
 $b^2 + c^2 - 2 b c \cos. A$, also $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 b c \cos. A}$.

Ist A stumpf, so ist $BE = c$, und $BP = c + b \cos. A$, also
 $BC = \sqrt{b^2 + c^2 + 2 b c \cos. A}$. In beyden Fällen ist nur ein BC möglich.

2ter Fall. Es ist: $CP : BP = 1 : \cot. CBA$, oder $b \sin. A : c - b \cos. A =$
 $1 : \text{Tang. } BCP = 1 : \cot. B$. also ist $\cot. B = \frac{c - b \cos. A}{b \sin. A}$, und wenn

A stumpf ist, und $BE = c$, so ist $\cot. B = \frac{c + b \cos. A}{b \sin. A}$.

3ter Fall. Da die Seiten sich wie die Sinus der ihnen gegenüberlie-
genden Winkel verhalten, und nach Nro. XXXXII. die Summe der Sinus
zweyer Winkel sich zur Summe ihrer Differenz, wie die Tangente ihrer
halben Summe zur Tangente ihrer halben Differenz verhält; so kann man
durch dieses Verhältniß die unbekannten Winkel B und C finden, denn
die Summe dieser Winkel ist $= 180 - A$, die Summe der ihnen gegen-
überliegenden Seiten $= (b + c)$; ihre Differenz $(c - b)$, also hat man:
 $(c + b) : (c - b) :: \text{Tang. } \frac{1}{2} (180 - A) : \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ Differenz}$, somit

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ Differenz} = \frac{c - b \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} (180 - A)}{c + b}$$

Nun ist $c = 1387,86$, $b = 1244$, $c + b = 2631,86$, $c - b = 143,86$;
 $\frac{1}{2} (180 - A) = 58^\circ$.

$\log. (b - c) = 2,1579401$	$\frac{1}{2} \text{ Summe} = 58^\circ 00', 00''$
$\log. \text{Tang. } 58^\circ = 0,2042108$	$+ \frac{1}{2} \text{ Differ.} = 4, 59, 57'', 37,$
$\text{Comp. log. } (b + c) = 6,5797371$	$C = 62^\circ, 59', 57'', 37.$
$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ Differ.} = 8,9418880$	$B = 53^\circ, 00', 2'', 63$

LIII. Aufgabe. Die drey Winkel sind gegeben.

Auflösung. Diese Aufgabe ist ganz unbestimmt. Es muß nebst den
Winkeln noch eine Linear - Gröfse gegeben seyn. Durch die den Schen-

keln coordinirten Gröſſen können nur die Verhältnisse der Theile eines Dreyeckes, aber nicht ihre absoluten Gröſſen bestimmt werden.

LIV. Aufgabe. Die drey Seiten sind gegeben. Man sucht die drey Winkel.

Auflösung. Es sey (Fig. 13.) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,

Man ziehe die senkrechte $\overset{C}{AE}$, und es sey $AE = x$, so ist $BE = c - x$, somit $CE^2 = AC^2 - AE^2 = b^2 - x^2$; auch ist: $CE^2 = BC^2 - BE^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$, folglich: $b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$, also:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Nun ist 1.) $\cos. CAB = \cos. A = \frac{AE}{AC} = \frac{x}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Ebenso

findet man 2.) $\cos. B = \frac{BE}{BC} = \frac{c - x}{a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$3.) \cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Um also den Cosinus eines Winkels C zu finden, quadrire man die beyden Seiten, die ihn einschliessen, und von ihrer Summe ziehe man das Quadrat der gegenüberliegenden Seite ab. Die Differenz dividire man durch das doppelte Produkt der einschliessenden Seiten.

Ist das Quadrat der gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der den Winkel einschliessenden Seiten, so ist der Cosinus des eingeschlossenen Winkels = 0, der Winkel = 90° , also $C = 90^\circ$, wenn $c^2 = a^2 + b^2$ ist. Ist aber c^2 gröſſer als $a^2 + b^2$, so ist C gröſſer als 90° . Die Berechnung der Winkel durch diese Formel ist beschwerlich, wenn die Seiten durch groſſe Zahlen ausgedrückt sind; auch erhält man die natürlichen Sinus und Cosinus, welche in den neueren Tafeln nicht gegeben werden. Man muſs also Formeln haben, welche durch die Logarithmen zu berechnen sind.

In der Gleichung für $\text{Cos. } C$ addire man zu beyden Seiten 1, so hat man

$$1 + \text{Cos. } C = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b+c) \cdot (a+b-c)}{2ab}$$

da nun $1 + \text{Cos. } C = 2 \text{Cos. }^2 \frac{1}{2} C$, so ist: $\text{Cos. } \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c)}}{2ab}$

Subtrahirt man $\text{Cos. } C$ von 1, so ist;

$$1 - \text{Cos. } C = \frac{c^2 - a^2 + 2ab - b^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \frac{(c+a-b) \cdot (c+b-a)}{2ab}$$

also, da $1 - \text{Cos. } C = 2 \text{Sin. }^2 \frac{1}{2} C$ ist: $\text{Sin. } \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{c+a-b \cdot c+b-a}}{2ab}$

Ebenso findet man:

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{(b+c+a) \cdot (b+c-a)}}{2bc}; \quad \text{Sin. } \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{(a+b-c) \cdot (a+c-b)}}{2bc}$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} B = \frac{\sqrt{(a+c+b) \cdot (a+c-b)}}{2ac}; \quad \text{Sin. } \frac{1}{2} B = \frac{\sqrt{(b+c-a) \cdot (b+a-c)}}{2ac}$$

Diese Formeln können noch bequemer eingerichtet werden, wenn man $P = \frac{1}{2}(a+b+c)$ setzt; und substituirt, so wird:

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{P \cdot P - c}}{ab}; \quad \text{Sin. } \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{P - a \cdot P - b}}{ab}$$

Wenn nun $\text{Sin. } \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{P - b \cdot P - c}}{bc}$, $\text{Cos. } \frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{P \cdot P - a}}{bc}$ ist, so ist

$$2 \text{Sin. } \frac{1}{2} A \text{Cos. } \frac{1}{2} A = \text{Sin. } A = \frac{2 \sqrt{P \cdot P - a} \sqrt{P - b \cdot P - c}}{bc}$$

also ist die Höhe $= P \text{Sin. } A$ multipliziert mit der halben Basis $=$ dem Flächen-Inhalt $= \sqrt{P \cdot P - a \cdot P - b \cdot P - c}$.

Ferner ist r , der Radius des Kreises, dessen Sehnen die Radien des Dreyecks sind $= \frac{a}{2 \text{Sin. } A} = \frac{abc}{4 \sqrt{P \cdot P - a \cdot P - b \cdot P - c}}$.

Muster Rechnung. Formel. $\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{P \cdot P - a}{b \cdot c}}$

Es sey $a = 1400$; $b = 1244$, $c = 1387$, 86, also $P = \frac{1}{2} (a + b + c) = 2015$, 93; $P - a = 615$, 93. $P - b = 771$, 93, $P - c = 628$, 07.

$$\log. P = 3, 3044755.$$

$$\log. P - a = 2, 7895314.$$

$$\text{Comp. log. } b = 6, 9051796.$$

$$\text{Comp. log. } c = 6, 8576540.$$

$$\text{Dividirt mit 2: } 19, 8568405.$$

$$\log. \cos. \frac{1}{2} A = 9, 9284202. \quad \frac{1}{2} A = 32^\circ. \quad A = 64^\circ.$$

$$\text{Flächen - Inhalt} = \sqrt{P \cdot P - a \cdot P - b \cdot P - c} = \frac{1}{2} b \sin. A \cdot c.$$

$$\log. P = 3, 3044755.$$

$$\log. \frac{1}{2} b = 2, 7937904.$$

$$\log. P - a = 2, 7895314.$$

$$\log \sin. A = 9, 9536602.$$

$$\log. P - b = 2, 8875779.$$

$$\log. c = 3, 1423460.$$

$$\log. P - c = 2, 7930030.$$

$$\log. \text{des Inhaltes} = 5, 8897966.$$

$$\text{Dividirt mit 2: } 11, 7795928.$$

$$\text{Inhalt} = 775884. = (880, 843)^2.$$

$$\log. \text{d. Flächeninh.} = 5, 8897964.$$

LV. Im Dreyecke ACB (Fig. 14) beschreibe man einen Kreis mit der kleineren Seite, ziehe CF, FA, und GA, so ist der Winkel CGA = $\frac{1}{2}$ FCA = $\frac{1}{2} (A + B)$. Da nun der Winkel FGA = GBA + GAB ist, so ist GAB = $\frac{1}{2} (A - B)$.

Man ziehe GH paralell mit AB. Da nun FAG ein rechter Winkel ist, so ist FA = GA Tang FGA = GA Tang. $\frac{1}{2} (A + B)$; AH = GA. Tang. HGA = GA. Tang. $\frac{1}{2} (A - B)$

Nun sind die Dreyecke FBA, HGF ähnlich, also ist:

$$FB : BG = FA : AH, \text{ oder } a + b : a - b = \text{Tang. } \frac{1}{2} (A + B) : \text{Tang. } \frac{1}{2} (A - B)$$

$$\text{also auch: } \sin. A + \sin. B : \sin. A - \sin. B = \text{Tang. } \frac{1}{2} (A + B) : \text{Tang. } \frac{1}{2} (A - B).$$

Und wegen Aehnlichkeit der Dreyecke FBA, und BGE.

$$FB : AB = BE : BG, \text{ od. } \sin. A + \sin. B : \sin. (A + B) = \sin. (A - B) : \sin. A - \sin. B.$$

Diese Verhältnisse sind schon im Vorhergehenden erwiesen worden. ★

Man mache den Winkel $FGK = HGA = \frac{1}{2} (A - B)$, und ziehe KA , so ist $KG = 2 \cos. \frac{1}{2} (A - B)$ und $GA = 2 \cos. \frac{1}{2} (A + B)$, und der Winkel $KGA = \frac{1}{2} (A + B) - \frac{1}{2} (A - B) = B$.

Es sind demnach die Dreyecke FBA , und KGA ähnlich, denn [der Winkel $FGA = KGA = B$, und die Winkel GFA , GKA haben den halben Bogen GA zum Maafse. Es ist demnach: $FB : BA = KG : GA$, oder $\sin. A + \sin. B : \sin. (A + B) = \cos. \frac{1}{2} (A - B) : \cos. \frac{1}{2} (A + B)$.

$$\text{also ist: } \frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. (A + B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}{\cos. \frac{1}{2} (A + B)}.$$

Da nun auch das Dreyeck BGE den Dreyecken FBA , und KGA ähnlich ist, so ist $BE : BG = GK : GA$, oder $\sin. (A - B) : \sin. A - \sin. B = \cos. \frac{1}{2} (A - B) : \cos. \frac{1}{2} (A + B)$, also:

$$\frac{\sin. A - \sin. B}{\sin. (A - B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A + B)}{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke FBE und FAK , ist $FB : BE = FA : FK$, oder $\sin. A + \sin. B : \sin. (A - B) = \sin. \frac{1}{2} (A + B) : \sin. \frac{1}{2} (A - B)$, also:

$$\frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. (A - B)} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (A + B)}{\sin. \frac{1}{2} (A - B)}.$$

Alle diese Verhältnisse können auch durch Substitutionen gefunden werden. Es ist nämlich nach:

$$\text{Nro. XXXXI. } \sin. A + \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B). \cos. \frac{1}{2} (A - B).$$

$$\text{Nro. XXIX } \sin. (A + B) = 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B). \cos. \frac{1}{2} (A + B).$$

$$\text{also 1.) } \frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. (A + B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}{\cos. \frac{1}{2} (A + B)}.$$

$$\sin. A - \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} (A - B). \cos. \frac{1}{2} (A + B).$$

$$\sin. (A - B) = 2 \sin. \frac{1}{2} (A - B). \cos. \frac{1}{2} (A - B).$$

$$\text{also 2.) } \frac{\sin. A - \sin. B}{\sin. (A - B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A + B)}{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}.$$

$$\sin. A - \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} (A - B). \cos. \frac{1}{2} (A + B).$$

$$\sin. (A + B) = 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B). \cos. \frac{1}{2} (A + B).$$

also 3.) $\frac{\sin. A - \sin. B}{\sin. (A + B)} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (A - B)}{\sin. \frac{1}{2} (A + B)}.$

$$\sin. A + \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cos. \frac{1}{2} (A - B).$$

$$\sin. (A - B) = 2 \sin. \frac{1}{2} (A - B) \cos. \frac{1}{2} (A - B).$$

also 4.) $\frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. (A - B)} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (A + B)}{\sin. \frac{1}{2} (A - B)}.$

5.) $\frac{\cos. A + \cos. B}{\sin. (A + B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}{\sin. \frac{1}{2} (A + B)}$

6.) $\frac{\cos. A - \cos. B}{\sin. (A + B)} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (A - B)}{\cos. \frac{1}{2} (A + B)}.$

7.) $\frac{\cos. A + \cos. B}{\sin. (A - B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A + B)}{\sin. \frac{1}{2} (A - B)}.$

8.) $\frac{\cos. B - \cos. A}{\sin. (A - B)} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (A + B)}{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}.$

9.) $\frac{\cos. B + \cos. A}{\cos. B - \cos. A} = \frac{\cot. \frac{1}{2} (A + B)}{\tan. \frac{1}{2} (A - B)}.$

10. $\frac{\cos. B - \cos. A}{\cos. B + \cos. A} = \frac{\tan. \frac{1}{2} (A - B)}{\cot. \frac{1}{2} (A + B)}.$

Gesetzt, es wäre $\frac{a}{b} \frac{\cos. B - \cos. A}{\sin. (A + B)} = c$ zu berechnen. $(A + B)$; a , b und c gegeben.

Man substituirt n^o 6, so hat man $\frac{a}{b} \frac{\sin. \frac{1}{2} (A - B)}{\cos. \frac{1}{2} (A + B)} = c$, also!

$$\sin. \frac{1}{2} (A - B) = \frac{bc}{a} \cos. \frac{1}{2} (A + B).$$

Da nun $(A + B)$ gegeben ist, und man $(A - B)$ durch diese Gleichung findet, so kennt man auch die Winkel A und B , da man ihre halbe Summe und ihre halbe Differenz kennt. Ohne Beyhülfe dieser Transformation würde man den Werth von A und B nicht bestimmen können.

LVI. Die folgenden Transformationen sind nicht minder wichtig.

$$1.) \sin. A + \sin. B + \sin. (A + B)$$

$$\begin{aligned} = \frac{P}{r} &= 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos. \frac{1}{2} (A - B) + 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cos. \frac{1}{2} (A + B) \\ &= 2 \sin. \left(\frac{1}{2} (A + B) \right) \cdot \left(\cos. \frac{1}{2} (A - B) + \cos. \frac{1}{2} (A + B) \right) \\ &= 4 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos. \frac{1}{2} A \cdot \cos. \frac{1}{2} B. \end{aligned}$$

$$2.) \sin. A + \sin. B - \sin. (A + B)$$

$$\begin{aligned} = \frac{P - c}{r} &= 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \left(\cos. \frac{1}{2} (A - B) - \cos. \frac{1}{2} (A + B) \right) \\ &= 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \left(\cos. \frac{1}{2} (A - B) - \cos. \frac{1}{2} (A + B) \right) \\ &= 4 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \sin. \frac{1}{2} A \cdot \sin. \frac{1}{2} B. \end{aligned}$$

$$3.) \sin. (A + B) + (\sin. A - \sin. B)$$

$$\begin{aligned} = \frac{P - b}{r} &= 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos. \frac{1}{2} (A + B) + 2 \sin. \frac{1}{2} (A - B) \cdot \cos. \frac{1}{2} (A + B) \\ &= 2 \cos. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \left(\sin. \frac{1}{2} A + \sin. \frac{1}{2} (A - B) \right) \\ &= 4 \cos. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \sin. \frac{1}{2} A \cdot \cos. \frac{1}{2} B. \end{aligned}$$

$$4.) \sin. (A + B) - (\sin. A - \sin. B)$$

$$\begin{aligned} = \frac{P - a}{r} &= 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos. \frac{1}{2} (A + B) - 2 \sin. \frac{1}{2} (A - B) \cdot \cos. \frac{1}{2} (A + B) \\ &= 2 \cos. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \left(\sin. \frac{1}{2} (A + B) - \sin. \frac{1}{2} (A - B) \right) \\ &= 4 \cos. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \sin. \frac{1}{2} B \cdot \cos. \frac{1}{2} A. \end{aligned}$$

$$5.) \sin. (A - B) + (\sin. A - \sin. B)$$

$$6.) \sin. (A - B) - (\sin. A - \sin. B)$$

$$\begin{aligned} &= 4 \sin. \frac{1}{2} (A - B) \cdot \cos. \frac{1}{2} A \cdot \cos. \frac{1}{2} B \\ &= 4 \sin. \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin. \frac{1}{2} A \cdot \sin. \frac{1}{2} B. \end{aligned}$$

Es sind noch viele andere solche die Berechnung erleichternde Transformationen möglich.

LVII. Aufgabe, Die drey Seiten eines Dreyeckes sind gegeben. Man soll den Radius des Kreises, der sie berührt, bestimmen.

Auflösung. Es sey (Fig. 15) $DB = a$, $AD = b$, $AB = c$.

Es sey GFE der berührende Kreis. Sollen DB und AB Tangenten desselben, F und E die Berührungs - Punkte seyn, so muß $FB = EB$ seyn.

und der Mittelpunkt C muß in der Linie liegen, welche den Winkel DBA halbt. (vid. Elemente.) Ebenso offenbar ist es, daß dieser Mittelpunkt in der Linie liege, welche den Winkel DAB halbt, also ist er der Durchschnits - Punkt beyder Linien.

Man halbire demnach die Winkel A und B, so hat man den Punkt C, und es ist, wenn F, G, E die Berührungs - Punkte sind,

$$CE = CF = CG = R, \text{ auch ist } BE = BF; AE = AG; DG = DF.$$

Die Theilungs - Linien CA, CB, CD bilden 3 Dreyecke, deren Basen die 3 Seiten, und deren Höhe der Radius ist, die Summe ihrer Flächen-Inhalte ist gleich dem Flächen-Inhalte des ganzen Dreyeckes.

Es ist demnach, wenn $a + b + c = 2 P$ gesetzt wird, Nro. LIV.

$$\begin{aligned} R. P &= \sqrt{P. P - a. P - b. P - c}, \text{ also } R = \frac{\sqrt{P - a. P - b. P - c}}{\sqrt{P}} \\ &= \frac{\sqrt{a + b - c. a + c - b. b + c - a}}{2 \sqrt{a + b + c}} \end{aligned}$$

LVIII. Es sey $EB = x$, so ist $AE = AG = c - x$, folglich $DG = DF = b - c + x$, und $BF = a - b + c - x$.

Es ist aber $BF = EB = x$, also $x = \frac{(a + c - b)}{2}$, folglich

$$AE = c - x = \frac{1}{2} (b + c - a); DG = \frac{1}{2} (a + b - c).$$

LIX. Ziehet man die senkrechte DH, so ist der Winkel HDX = $\frac{1}{2} (A - B) = ECX$, folglich der Winkel BCX = $90^\circ - \frac{1}{2} A$; ACX = $90^\circ - \frac{1}{2} B$.

LX. Man verlängere DA und DB, und nehme auf diesen Linien $DK = DP = \frac{1}{2} (a + b + c)$. In P und K erreichte man senkrechte Linien, die sich in M schneiden, und es ist der Winkel: $KMP = 180^\circ - C = A + B$.

LXI. Diesemnach ist $AK = DK - DA = \frac{1}{2} (a + c - b)$, und $BP = DP - DB = \frac{1}{2} (b + c - a)$.

Von M ziehe man eine senkrechte auf AB, so ist $AR = AK$, $BR = BP$, und der Kreis vom Radius $MR = MK = MP$ berührt die Seite AB und die Verlängerungen der übrigen.

LXII. Da $DK = DP$; $MK = MP$ ist, so halbirt MD die Winkel KDP, und KMP; und geht durch den Mittelpunkt C; es ist also:

$$MK = DK \text{ Tang. } \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{P-a} \sqrt{P-b}}{\sqrt{P} \sqrt{P-c}} = \frac{\sqrt{P \cdot P-a} \sqrt{P-b}}{\sqrt{P} \sqrt{P-c}}, \text{ und}$$

substituirt man die Winkel - Gröfsen Nro. LVI.,

$$\text{so ist (wenn } r = 1) MK = 4 \cos. \frac{1}{2} A. \cos. \frac{1}{2} B. \cos. \frac{1}{2} (A + B).$$

Da nun auch $MK = DM$. $\cos. DMK = DM \cos. \frac{1}{2} (A + B)$ ist, so ist $DM = 4 \cos. \frac{1}{2} A. \cos. \frac{1}{2} B$. Und da die Dreyecke DKM, DGC ähnlich sind, so findet man $DC = 4 \sin. \frac{1}{2} A. \sin. \frac{1}{2} B$.

LXIII. Man halbire DC, und durch dem Theilungs-Punkte V ziehe man eine DM senkrechte Sehne TS, so halbirt sie die Bögen AD, und DB, und es ist $TD = 2 \sin. \frac{1}{2} B$, $SD = 2 \sin. \frac{1}{2} A$, $TS = 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B)$, $VU = 2 \cos. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} DM$, denn die verlängerte AC trifft den Punkt S, die verlängerte BC trifft T.

LXIV. Aufgabe. Die Periferie, die Höhe des Dreyecks, und der der Basis gegenüber liegende Winkel sind gegeben. Man soll das Dreyeck construiren und berechnen.

Construction. Man ziehe eine Linie $DK = \frac{1}{2} \text{ Periferie} = P$.

In D construire man den gegebenen Winkel C, und halbire ihn durch eine Linie. In K errichte man eine senkrechte, welche die Theilungs-Linie in M schneidet.

Mit KM als Radius beschreibe man einen Kreis, und mit der gegebenen Höhe DH von D als Centrum einen anderen.

Zu beyden Kreisen führe man eine Tangente. Sie bestimmt die Punkte A und B.

Berechnung. Es bedeute P die halbe Periferie, H die Höhe, und der gegebene der Basis gegenüber liegende Winkel $= 180 - (A + B) = C$.

Nach LVI. ist $P = 4r \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B$, und die Basis $= 2r \sin(A+B)$ also $P = 2r \sin(A+B) = 4r \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B$, also:
 $P \cdot (P - 2r \sin(A+B)) = 16r^2 \sin^2 \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos B$
 $= 2r \sin^2 \frac{1}{2}(A+B) \cdot 2r \sin A \sin B$.

Nun ist $h = 2r \sin A \sin B$, also

$P^2 - 2r \sin(A+B) \cdot P = 2r \sin^2 \frac{1}{2}(A+B) \cdot h$, also:

$$2r = P^2 : P \sin(A+B) + h \sin^2 \frac{1}{2}(A+B).$$

$$\text{also die Basis} = 2r \sin(A+B) = \frac{2P^2 \sin(A+B)}{2P \sin(A+B) + h(1 - \cos(A+B))} \\ = \frac{2P^2}{2P + h \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2}(A+B)}.$$

wenn man nämlich Zähler und Nenner durch $\sin(A+B)$ dividirt, und für $\frac{1 - \cos(A+B)}{\sin(A+B)}$, $\text{Tang.} \frac{1}{2}(A+B)$ substituirt.

Auf diese Weise hat man den Radius des umschriebenen Kreises, und die Basis bestimmt. Die Winkel findet man folgendermaassen:

$$\text{Es ist } 2PD = A + AH + DB + HB = h \cdot (\text{Cosec. } A + \text{Cot. } A + \text{Cosec. } B + \text{Cot. } B) \\ (\text{Fig. 16.}) \quad = h \cdot (\text{Cot.} \frac{1}{2}A + \text{Cot.} \frac{1}{2}B). \text{ Nro. XXVI.} \\ = h \cdot \frac{(\sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B + \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B)}{\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B} \\ = 2h \cdot \sin \frac{1}{2}(A+B)$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B) - \cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B) + \cos \frac{1}{2}(A+B)} \text{ also:} \\ \cos \frac{1}{2}(A-B) = h \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B) + P \cos \frac{1}{2}(A+B)}{P}.$$

$$\text{Der Flächen-Inhalt} = \frac{2r \sin(A+B) h}{2} = \frac{P^2 \cdot h}{2P + h \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Wenn also von den 5 coordinirten Grössen (die Basis, die Höhe, der Perimeter, der Inhalt, der der Basis gegenüberliegende Winkel) 3 gegeben sind, so findet man das Uebrige.

LXV. Aufgabe. Die Winkel A, B, und der Inhalt eines Dreyeckes sind gegeben. Man soll das Dreyeck bestimmen.

K

Auflösung. Der Flächeninhalt $= F = (2r \sin. (A+B). 2r \sin. A. \sin. B): 2$.

$$\text{also: } 2r^2 = \frac{F}{\sin. (A+B). \sin. A \sin. B}; \quad 2r = \frac{\sqrt{2F}}{\sqrt{\sin. (A+B). \sin. A \sin. B.}}$$

$$2r \sin. (A+B) = \frac{\sqrt{2F} \sin. (A+B)}{\sqrt{\sin. A. \sin. B.}}; \quad 2r \sin. A = \frac{\sqrt{2F} \sin. A}{\sqrt{\sin. (A+B). \sin. B.}},$$

$$2r \sin. B = \frac{\sqrt{2F} \sin. B}{\sqrt{\sin. (A+B). \sin. A.}}$$

(Fig. 17.) Diese Aufgabe hat in der praktischen Geometrie große Anwendbarkeit. Wenn nämlich z. B. gefordert wird von einem Trapez ABCD ein anderes EFBC in gegebener Richtung, und von gegebenen Inhalte abzuschneiden.

Man verlängere die Seiten, so hat man den Flächen - Inhalt des Dreyecks GBC, da BC und der Winkel GBC, und GCB gegeben sind.

Da nun der Winkel GEF gegeben ist, so kennt man im Dreyecke GEF zwey Winkel, und der Flächen - Inhalt; durch die obigen Formeln findet man GE, BF und EF.

LXVI. Aufgabe. Die drey Perpendikel von der Spitze auf die gegenüberliegenden Seiten sind gegeben.

Auflösung. Die drey Perpendikel seyen m, n, p ; also $m = 2r \sin. A. \sin. B$; $n = 2r \sin. A. \sin. (A+B)$; $p = 2r \sin. B. \sin. (A+B)$.

$$\text{Nun ist } \cos. (A+B) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4r^2 (\sin.^2 A + \sin.^2 B - \sin.^2 (A+B))}{8r^2 (\sin. A. \sin. B.)}$$

$$= \frac{\sin. A}{2 \sin. B} + \frac{\sin. B}{2 \sin. A} - \frac{\sin.^2 (A+B)}{2 \sin. A \sin. B.}$$

$$= \frac{n}{2p} + \frac{p}{2n} - \frac{np}{2m^2} = \frac{m^2 (n^2 + p^2) - n^2 p^2}{2m^2 np.}$$

Man versuche mit den gegebenen Gröfsen ein Dreyeck zu construiren.

LXVII. Aufgabe. In einem rechtwinklichten Dreyecke (Fig. 14.) ist die Hypothenuse $AB = a$, und die Summe der Catheten und der Höhe, oder $BC + CP + AC = b$ gegeben. Man soll das Dreyeck bestimmen.

Auflösung. Carnot giebt die folgende algebraische Auflösung, als einen Beweis, wie unzuverlässig die durch die Algebra gefundenen Resultate sind. Es sey $CP = x$, $AC = y$, so ist $BC = b - x - y$, und

$$a^2 = b^2 - 2bx - 2by + 2xx + x^2 + 2y^2.$$

Ferner ist: $a : y = b - x - y : x$; also $2ax = 2by - 2xy - 2y^2$ folglich: $a^2 + 2ax = b^2 - 2bx + x^2$, somit wenn man das Quadrat suppliret: $x = a + b + \sqrt{2a(a+b)}$

Diesemnach hätte x zwey Werthe, aber $x = CP = (a + b) + \sqrt{2a(a+b)}$ ist offenbar absurd, weil CP nicht gröfser seyn kann, als $AB + AC + CP + BC$, also kann x keinen anderen Werth haben, als $a + b - \sqrt{2a(a+b)}$.

2te Auflösung. Es ist:

$$\begin{aligned} b &= 2r (\sin. A + \cos A + \sin. A); & a &= 2r. \\ \frac{b+a}{a} &= 1 + \cos. A + \sin. A. (1 + \cos. A) = (1 + \sin. A). (1 + \cos. A) \\ &= 2 \cos^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} A). & 2 \cos. \tfrac{1}{2} A. & \text{also:} \\ \sqrt{\frac{b+a}{a}} &= 2 \cos. (45^\circ - \tfrac{1}{2} A). \cos. \tfrac{1}{2} A. \\ &= \cos. 45^\circ + \cos. 45^\circ - A). & \text{folglich:} & \\ \cos. (45^\circ - A) &= \sqrt{\frac{b+a}{a}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Setzt man $BC = 5$; $AC = 4$, $CP = 3$, so ist $\sqrt{\frac{b+a}{a}} = 1,69705028$; $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0,70710678$. also $(45 - A) 3^\circ, 8', A = 36^\circ, 52'$.

LXVIII. Aufgabe. Der Radius des umschliessenden Kreises $= r$, und der Radius des tangirenden Kreises $= R$ sind gegeben. Man kennt auch einen Winkel. Man soll das Dreyeck construiren und berechnen.

Construction. Wir wissen aus dem Vorigen, daß (Fig. 15.)
 $DU = 2 r \cos. \frac{1}{2} (A - B)$, und da $DC = 4 r \sin. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} B$ ist, so ist
 $CU = 2 r \cos. \frac{1}{2} (A + B)$.

Es sey der gegebene Winkel $= 180^\circ - (A + B)$. Auf einer Linie DP (Fig. 17) nehme man einen Punkt C, und construire einen Winkel $YCU = \frac{1}{2} (A + B)$.

Man nehme $CY = 2 r$, und ziehe die senkrechte YU, so ist $CU = 2 r \cos. \frac{1}{2} (A + B)$, und somit U ein Punkt des umschriebenen Kreises.

Von C mit dem Radius R beschreibe man einen Kreis, und ziehe zum Punkte F, wo der Kreis die verlängerte CY schneidet eine Tangente. Sie bestimmt den Punkt D auf den Linie CP.

Von D aus ziehe man eine zweyte Tangente zum Kreise.

Nun ist DU eine Sehne des Kreises vom Radius r ; durch diesen und die Sehne bestimme man den Mittelpunkt K.

Von K aus mit dem Radius r beschreibe man einen Kreis. Er schneidet die Tangenten in den Punkten A und B und ABC₁ ist das verlangte Dreyeck.

Berechnung. Es ist $R = \frac{\sqrt{P - a} \cdot \sqrt{P - b} \cdot \sqrt{P - c}}{\sqrt{P}}$
 $= 4 r \cos. \frac{1}{2} (A + B) \cdot \sin. \frac{1}{2} A \cdot \sin. \frac{1}{2} B$ (Nro. LVI.)
 $= 2 r \cos. \frac{1}{2} (A + B) \cdot (\cos. \frac{1}{2} (A - B) - \cos. \frac{1}{2} (A + B))$

also $\cos. \frac{1}{2} (A - B) = \frac{R + 2 r \cos. \frac{1}{2} (A + B)}{2 r \cos. \frac{1}{2} (A + B)}$

LXIX. Aufgabe. Auf der Linie AC sind die Punkte A, B, C (Fig. 18) gegeben, und es ist $AB = a$, $BC = b$.

Von einem Punkte O aus werden die Winkel AOB, BOC gemessen. Man soll die Distanzen AO, BO, CO bestimmen.

Construktion, Man construire einen Kreis, in welchem AB eine Sehne, und A ein Winkel an der Periferie sey.

Man construire einen 2ten Kreis, in dem BC eine Sehne, und B ein Periferie - Winkel ist.

Die beyden Kreise schneiden sich in B, und in einem Punkte O', und dieser Punkt ist der, von welchem aus *a*, unter dem Winkel A, *b* unter dem Winkel B gesehen wird.

Berechnung. Bey dieser, wie bey anderen Aufgaben dieser Art, ist es rathlich mit der Construction anzufangen; sonst kömmt man oft auf absurde Resultate. Bey Berechnungen betrachtet man die Gröfsen als Mengen, und somit kann die Rechnung die Lage der Punkte, welches oft wesentlich ist, nicht bestimmen.

Die Berechnung kann um vieles erleichtert werden, wenn man sich einer Verwandlung der trigonometrischen Gröfsen bedient.

$$\text{Nach Nro. XXXX. ist: } \text{Tang. } (A + B) = \frac{\text{Tang. } A + \text{Tang. } B}{1 - \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B}$$

$$\text{Tang. } (A - B) = \frac{\text{Tang. } A - \text{Tang. } B}{1 + \text{Tang. } A \cdot \text{Tang. } B.}$$

$$\text{Man setze } B = 45^\circ, \text{ so ist: } \text{Tang. } (A + 45^\circ) = \frac{\text{Tang. } A + 1}{1 - \text{Tang. } A.}$$

$$\text{Tang. } (A - 45^\circ) = \frac{\text{Tang. } A - 1}{\text{Tang. } A + 1.}$$

Bey der Gleichung für $\text{Tang. } (A + 45^\circ)$ ist $\text{Tang. } A$ grösser als 1, weil A grösser als 45° seyn muß, also $(A + 45^\circ)$ stumpf ist.

$$\text{Setzt man } A = 45^\circ, \text{ so hat man: } \text{Tang } (45^\circ + B) = \frac{1 + \text{Tang. } B}{1 - \text{Tang. } B.}$$

$$\text{Tang. } (45^\circ - B) = \frac{1 - \text{Tang. } B}{1 + \text{Tang. } B.}$$

Hier ist B immer kleiner als 45° , und es ist einleuchtend, daß die eine dieser Tangenten die Cotangente der anderen sey.

Mittels dieser Verwandlung kann demnach jede Fraktionär-Größe von der Form. $\frac{m \pm n}{m \pm n}$ in eine Tangente verwandelt, und durch Logarithmen bequem berechnet werden.

Der Winkel AOC ist die Summe der gemessenen Winkel. Sein Supplement sey $= 2S = CAO + ACO$, die Differenz dieser zwey Winkel sey $= 2x$, so ist der grössere $= (S + x)$, der kleinere $= (S - x)$.

Es sey der Winkel BOC $= B$, AOB $= A$, so hat man,
BO: Sin. BCO $= b$: Sin. B, und BO: Sin. BAO $= a$: Sin. A, also

$$\frac{\text{Sin. BCO}}{\text{Sin. BAO}} = \frac{b. \text{Sin. A}}{a. \text{Sin. B}}$$

Substituirt man für BCO, und BAO ihren durch S und x ausgedruckten Werth, so ist man ungewiss, ob BCO, oder BAO der grössere ist, ehe man nicht $b. \text{Sin. A}$ und $a. \text{Sin. B}$ berechnet hat.

Wir wollen annehmen $b. \text{Sin. A}$ sey kleiner als $a. \text{Sin. B}$, so hat man

$$\frac{b. \text{Sin. A}}{a. \text{Sin. B}} = \frac{\text{Sin. } (S - x)}{\text{Sin. } (S + x)}$$

Da nun jede Grösse durch die Tangente irgend eines Winkels ausgedruckt werden kann, so setze man:

$\frac{b. \text{Sin. A}}{a. \text{Sin. B}} = \text{Tang. T}$, und da $\frac{b. \text{Sin. A}}{a. \text{Sin. B}}$ eine Fraktion ist, weil $b. \text{Sin. A}$ kleiner ist als $a. \text{Sin. B}$, so ist der Winkel T kleiner als 45° . Man hat also:

$$\text{Tang. T} = \frac{\text{Sin. } (S - x)}{\text{Sin. } (S + x)} = \frac{\text{Sin. S. Cos. } x - \text{Cos. S. Sin. } x}{\text{Sin. S. Cos. } x + \text{Cos. S. Sin. } x}$$

und wenn man im Zähler und im Nenner durch $\text{Cos. S. Cos. } x$ dividirt:

$$\text{Tang. T} = \frac{\text{Tang. S.} - \text{Tang. } x}{\text{Tang. S.} + \text{Tang. } x}$$

Hieraus wird: $\text{Tang. } x = \frac{1 - \text{Tang. T}}{1 + \text{Tang. T}} \text{Tang. S.} = \text{Tang. } (45^\circ - T). \text{Tang. S.}$

Da man somit die Summe $2S$, und die Differenz $= 2x$ kennt, so kennt man die Winkel BAO. und BCO; folglich auch AO' BO' CO'.

M u s t e r - R e c h n u n g.

Es sey $a = 240'$, $b = 200$, $AOB = A = 65^\circ$; $BOC = B = 20^\circ$

$$\begin{array}{rcl} \log. a & = & 2. 3802112. \\ + \log. \sin. B & = & 9. 5340517. \\ \hline \log. a \sin. B & = & 11. 9142629. \\ \log. b & = & 2. 3010300. \\ + \log. \sin. A & = & 9. 9572757. \\ \hline \log. b \sin. A & = & 12. 2583057. \\ - \log. a \sin. B & = & 11. 9142629. \\ \hline \log. T & = & 9. 6559572. \end{array}$$

$$45^\circ = 45^\circ$$

$$- T = 24^\circ, 21' 48'' 72.$$

$$45^\circ - T = 20^\circ, 38' 11'', 28. \quad \log. \text{Tang. } (45^\circ - T) = 9. 5758824.$$

$$S = 180^\circ - (A + B) = 47^\circ. 30. \quad \log. \text{Tang. } S = 0. 0379475.$$

$$2 \quad x = 22^\circ. 20'. 31''. 58; \text{ also } \log. \text{Tang } x = 9. 0138299.$$

$$S + x = 69^\circ. 50'. 31''. 58. \quad \text{Man suche:}$$

$$BO = \frac{a \sin. (S + x)}{\sin. A} = \frac{b \sin. (S - x)}{\sin. B}$$

$$S - x = 25^\circ. 9'. 23'', 42 \quad \text{also } BO' = 248', 69.$$

$$\log. a = 2. 3802112. \quad \log. b = 2. 3010300.$$

$$\log. \sin. (S + x) = 9. 9725483. \quad \log. \sin. (S - x) = 9. 6285056.$$

$$\text{Comp. } \log. \sin. A = 0. 0427243. \quad \text{Comp. } \log. \sin. B = 0. 4659483.$$

$$\log. BO' = 2. 3954838. \quad \log. BO' = 2. 3954839.$$

LXX. Aufgabe. Im Dreyecke ABC kennt man Winkel und Seiten. In O werden die Winkel $AOC = M$. $COD = N$ gemessen; Man soll AO, BO, CO bestimmen.

Auflösung. Es ist $DBC + EAC = ACB + M + N = 2S$; die Differenz dieser zwey Winkel sey $= 2x$, so ist der grössere $(S + x)$ der kleinere $(S - x)$. Ferner sey $CB = a$, $CA = b$.

Im Dreyecke COB ist: $\sin. N: a = \sin. DBC: CO$.

Im Dreyecke COA ist $\sin. M: b = \sin. CAE: CO$, also wie Nro. LXIX.

Hieraus wird durch dasselbe Verfahren, welches im vorigen Artikel gezeigt wurde: $\text{Tang. } x = \text{Tang. } (45 - T)$. $\text{Tang. } S$:

M u s t e r - R e c h n u n g

$$CB = a = 720, CA = b = 240, ACB = 70^\circ, N = 34^\circ, M = 25^\circ.$$

$$\log. a = 2.8573325.$$

$$\log. \text{Sin. } M = 9.6259483.$$

$$\log. a. \text{Sin. } M = 12.4832808.$$

$$\log. b = 2.3802112.$$

$$\log. \text{Sin. } N = 9.7475617.$$

$$\log. b. \text{Sin. } N = 12.1277729.$$

$$- \log. a. \text{Sin. } M = 12.4832808.$$

$$\log. \text{Tang. } T = 9.6444921.$$

$$S = \frac{C + M + N}{2} = 64^\circ, 50''.$$

$$45^\circ = 45^\circ$$

$$T = 23^\circ, 48', 00'', 3.$$

$$45^\circ - T = 21^\circ, 11', 59'', 7.$$

$$S = 64^\circ, 30', 00',$$

$$x = 39^\circ, 7', 3'', 86.$$

$$S + x = 103, 37, 3, 86.$$

$$S - x = 25^\circ 22, 56'', 14.$$

$$\log. a = 2.8573325.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } N = 0.2524383.$$

$$\log. \text{Sin. } (S - x) = 9.6321084.$$

$$\log. CO = 3.7418792.$$

$$\log. b = 2.3802112.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } M = 0.3740517.$$

$$\log. \text{Sin. } (S + x) = 9.9876163.$$

$$\log. CO = 2.7418792.$$

$$CO = 551, 924.$$

Hier trifft sogar die letzte Dezimale auf das genaueste zu, und auch die Berechnung von AO, BO giebt genau zusammentreffende Resultate, dennoch ist alles falsch, und wenn man mit den berechneten Grössen den Punkt O auf dem Papiere construiren will, so paßt nichts auf einander. Sucht man dem Punkt O durch die Constuction (Fig. 20) so sieht man, daß der Winkel, unter welchem die Seite AB gesehen wird, nicht $N + M$, wie Fig. 19., sondern $N - M$ sey.

LXXI. Aufgabe. Die Spitze des Dreyecks (Fig. 21.) liegt zwischen der Basis AB und dem Punkte O.

Auflösung. (Fig. 21) Man bestimme den Punkt O durch graphische Construction.

Es ist der Winkel $ACB = C = CBO + CAO + COB + COA = CBO + CAO + M + N$.

Man setze $CBO + CAO = 2 S$, so ist $S = \frac{(C - (M + N))}{2}$. Die Differenz dieser zwey Winkel setze man $= 2 x$, und verfare wie zuvor.

LXXII. Aufgabe. Der Punkt O liegt im Dreyecke selbst.

Auflösung. Man construire Fig. 22.

Die gemessenen Winkel M und N sind stumpf. Man bezeichne also durch N und M ihre Suplemente. Setzt man dann $CBO + CAO = 2 S$, so hat man $S = \frac{1}{2} (M + N + C)$, und findet die Differenz dieser Winkel $= 2 x$ durch dieselben Formeln.

LXXIII. Aufgabe. Die Linie AB (Fig. 23.) ist gegeben. In D werden die Winkel A, und B, in C die Winkel C, und D gemessen. Man soll die Distanzen aller dieser Punkte bestimmen.

Vorbereitung. Um diese Aufgabe zu lösen, muß man die folgende lösen können: In einem Dreyecke ist eine Seite $= a$, der ihr gegenüberliegende Winkel $= A$, und das Verhältniß der beyden übrigen Seiten $= m: n$ gegeben; man soll das Dreyeck bestimmen.

Man kennt die halbe Summe der unbekannten Winkel $= \frac{180 - A}{2}$.

Nach unserer Bezeichnungs-Art sind $2 r \sin. B$, $2 r \sin. C$ die unbekannten Seiten, deren Verhältniß: $m: n$ ist, also:

$$2 r \sin. B: 2 r \sin. C = m: n,$$

$$\sin. B + \sin. C: \sin. B - \sin. C = m + n: m - n.$$

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} (B + C): \text{Tang. } \frac{1}{2} (B - C) = m + n: m - n.$$

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} (180 - A): \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ Differenz} = m + n: m - n.$$

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ Differenz} = \frac{m - n}{m + n} \text{Tang. } \frac{1}{2} (180 - A).$$

$$\text{Setzt man } \frac{m}{n} = \text{Tang. } T, \text{ so ist } \frac{n - m}{n + m} = \frac{1 - \text{Tang. } T}{1 + \text{Tang. } T} = \text{Tang. } (45^\circ - T).$$

M

Auflösung der obigen Aufgabe. Im Dreyecke ABC kennt man AB, den ihr gegenüberliegenden Winkel $ACB = D$, und das Verhältniß der Seiten AC, BC findet man auf folgende Art:

Im Dreyecke ACD ist: $\text{Sin. } B : \text{Sin. } (B + C + D) = AC : CD$.

Im Dreyecke BCD ist: $\text{Sin. } (A + B) : \text{Sin. } (A + B + C) = BC : CD$.

also ist das Verhältniß der Seiten:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\text{Sin. } (A + B) \cdot \text{Sin. } (B + C + D)}{\text{Sin. } B \cdot \text{Sin. } (A + B + C)} = \frac{m}{n} = \text{Tang. } T.$$

Da nun die Summe der zwey übrigen Winkel $= (180^\circ - D)$ ist, so hat man: $\text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ Differenz} = \text{Tang. } 45^\circ - T$. $\text{Cot. } \frac{1}{2} D$.

M u s t e r - R e c h n u n g.

Es sey $AB = 500'$; $A = 36^\circ$; $B = 60^\circ$; $C = 40^\circ$; $D = 31^\circ$; so ist $(A + B) = 96^\circ$; $(B + C + D) = 131^\circ$; $(A + B + C) = 136^\circ$.

$$\log. \text{Sin. } (A + B) = \log. \text{Sin. } 84^\circ = 9.9976143.$$

$$\log. \text{Sin. } (B + C + D) = \log. \text{Sin. } 49^\circ = 9.8777709.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } B = \text{C. log. Sin. } 60^\circ = 0.0024694.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } (A + B + C) = \text{C. log. Sin. } 44^\circ = 0.1582287..$$

$$\log. \text{Tang. } T = 0.0960923.$$

Hier ist T größer als 45° , also hat man $(T - 45^\circ) = T = 51^\circ, 17', 15''$.

$$- 45^\circ = 45^\circ$$

$$T - 45^\circ = 6^\circ, 17', 15''.$$

$$\log. \text{Tang. } (T - 45^\circ) = 9.0394733. \quad \frac{1}{2} (180^\circ - 31^\circ) = 74^\circ, 30', 00''.$$

$$\log. \text{Cot. } 15^\circ, 30' = 0.5570117. \quad \frac{1}{2} \text{ Differenz.} = 21^\circ, 50', 56''.$$

$$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ Differ.} = 9.5964850. \quad BAC = 96^\circ, 20', 56''.$$

$$ABC = 52^\circ, 39', 4''.$$

Diese Aufgabe ist für dem Genie - und Artillerie - Offizier ungemein wichtig. Mit einem Spiegel - Sextanten, und den kleinen Logarithmen-Tafeln von Lalande kann er sehr schnell eine ganze Gegend mit hinreichender Genauigkeit aufnehmen.

LXXIV. Aufgabe. Im Dreyecke AOB (Fig. 24.) kennt man die Seiten und Winkel. Die Linie CO, und der Winkel AOC sind auch gegeben. Man soll den Winkel ACB bestimmen.

Auflösung. Es sey $AOB = O$; $AOC = D$; $ACB = C$; $CAO = X$; $CBO = Y$.

Der Winkel ADB ist ein äußerer für beyde Dreyecke ADC und BDO, also ist der Winkel $ADB = C + X = O + Y$, also $C = O + Y - X$.

Kann man demnach X und Y durch eine leichte Rechnung bestimmen, so ist C bestimmt.

Im Dreyecke ACB ist: $\text{Sin. } (D + X) : \text{Sin. } X = AO : CO$, also:

$$\frac{\text{Sin. } D \text{ Cos. } X + \text{Cos. } D \text{ Sin. } X}{\text{Sin. } X} = \frac{AO}{CO} \text{ folglich:}$$

$$\text{Tang. } X = \frac{CO \cdot \text{Sin. } D}{AO - CO \cdot \text{Cos. } D}.$$

$$\text{Ebenso findet man; } \text{Tang. } Y = \frac{CO \cdot \text{Sin. } (O + D)}{BO - CO \cdot \text{Cos. } (O + D)}.$$

Diese Aufgabe nennt man die Reduction des gemessenen Winkels auf das Centrum der Station. Bey Messung der Winkel wird immer auf den Mittelpunkt der Thürme und Signale visiret; aber der Beobachter kann sein Instrument nur selten in den Mittelpunkt des Thurms stellen. Er stellet sich also irgend wo in O, und von diesem Punkte aus mißt er den Winkel AOB. Allein der wahre Winkel ist ACB. Er mißt also, den Winkel $AOC = D$, und CO; dadurch findet er den Centrums - Winkel C: Nur muß er vorher AO und BO durch eine approximirende Berechnung gefunden haben.

Da diese Reduktion fast bey jeder Station und benahe jedem Winkel vorkömmt, so sucht man sich die Berechnung zu erleichtern.

Da AO und BO die Seiten eines grossen Dreyeckes sind, und also 20 bis 30 und mehr tausend Klafter betragen, so ist CO, da sie innerhalb des Thurms ist, verhältnißmäfsig sehr klein; man läßt also das zweyte Glied des Divisors weg.

Da die Winkel X und Y sehr klein sind, so nimmt man die Bögen selbst statt der Tangenten, und verwandelt die Bögen in Sekunden, indem man ihren Werth durch $\text{Sin. } 1''$ dividirt. Man hat also,

$$\text{Bogen } X \text{ in Sekunden} = \frac{CO. \text{ Sin. } D.}{AO. \text{ Sin. } 1''}.$$

$$\text{Bogen } Y \text{ in Sekunden} = \frac{CO. \text{ Sin. } (O + D)}{BO. \text{ Sin. } 1''}.$$

Die Differenz von X und Y wird nun zu O addirt, oder auch, je nachdem die Lage ist, davon subtrahirt, und somit C bestimmt.

M u s t e r - R e c h n u n g.

$$AO = 30000', BO = 27000', CO = 5', O = 42^\circ, D = 36^\circ (O + D) = 78^\circ.$$

$$\log. CO = 0.6989700.$$

$$\log. CO = 0.6989700.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } 1'' = 5.3144251.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } 1'' = 5.3144251.$$

$$\log. \text{ Sin. } D = 9.7692187.$$

$$\log. \text{ Sin. } (O + D) = 9.9904044.$$

$$\text{Comp. log. } AO = 5.5228787.$$

$$\text{Comp. log. } BO = 5.5686362.$$

$$\log. X'' = 1.3054925.$$

$$\log. Y'' = 1.5724357.$$

$$X'' = 20'', 2.$$

$$Y'' = 37'', 36.$$

$$- X'' = 20'', 2,$$

$$\text{Correctio} = 17'', 16.$$

Erinnerung. Man sieht wohl, daß die Zeichen von Y und X sich ändern, je nachdem sich die Lage der Punkte O und C ändert. Liegt C auf der rechten Seite von O, wie O' (Fig. 25.), so ist $C = O + X - Y$.

Ist O im Dreyecke ACB (Fig. 25.), so ist $C = O - X - Y$.

Ist der Punkt C im Dreyecke AOB, so ist: $C = O + X + Y$.

Die Weisung, welche Herr Delambre giebt, um die Zweydeutigkeiten zu vermeiden, ist sehr complizirt, und giebt statt Winkeln Bögen von 360 und mehr Graden.

Die sicherste scheint mir die folgende zu seyn. Es haben die Winkel O und C jeder zwey Schenkel; man bezeichne die Schenkel des Winkels O durch R und L (rechter, linker), die des Winkels C durch r, und l.

Schneiden sich L und r , so ist: $C = O + Y - X$.

Schneidet sich R und l , so ist: $C = O - Y + X$.

Schneiden sie sich nur in A und B , so liegt C im Dreyecke AOB , und somit $C = O + Y + X$; liegt O im Dreyecke ABC , so ist $C = O - X - Y$.

LXXV. Aufgabe. In einem irregulären Polygone von n Seiten sind $(n - 1)$ Seiten, und $(n - 2)$ Winkel gegeben; man soll den Flächen - Inhalt desselben bestimmen.

Auflösung. Die Figur 26. ist ein Sechseck. Es sey $FA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $DE = e$; der Winkel $FAG = A$, $ABI = B$, $BCM = C$, $CDT = D$. Die Diagonalen FB , FC , FD theilen das Sechseck in vier Dreyecke. Die Summe ihrer Oberflächen ist der Flächen - Inhalt des Polygons.

Man ziehe FG senkrecht auf die verlängerte AB , so hat man
 $\frac{1}{2} ab \sin. A = \triangle ABF$.

Man ziehe FH senkrecht auf die verlängerte BC , und es sey auch AI senkrecht auf dieser Verlängerung, und AK senkrecht auf FH , so ist $FH = FK + AI = a \sin. (A + B) + b \sin. B$, also:

$$\frac{1}{2} c (b \sin. B + a \sin. (A + B)) = \triangle FBC.$$

2

Man verlängere CD zu beyden Seiten, und ziehe BM und FL senkrecht auf diese Verlängerung; dann BN ; AQ senkrecht auf FN , endlich AP senkrecht auch CD , so ist $LN = BM = c \sin. C$; $QN = AO = b \sin. (B + C)$; $QF = a \sin. (A + B + C)$, also $FL = c \sin. C + b \sin. (B + C) - a \sin. (A + B + C)$, somit $\frac{1}{2} CD \cdot FL = \frac{1}{2} d (c \sin. C + b \sin. (B + C) - a \sin. (A + B + C)) = \triangle CFD$.

Verlängert man ED und zieht FS senkrecht auf dieselbe, so hat man $FS = d \sin. D + c \sin. (C + D) - b \sin. (B + C + D) - a \sin. (A + B + C + D)$, also $\frac{1}{2} FS \cdot DE = \frac{1}{2} e (d \sin. D + c \sin. (C + D) - b \sin. (B + C + D) - a \sin. (A + B + C + D)) = \triangle FDE$, also $ABCDEF$:

N

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} a (b \sin. A.) \\
 &+ \frac{1}{2} c (b \sin. B + a \sin. (A + B)) \\
 &+ \frac{1}{2} d (c \sin. C + b \sin. (B + C) - a \sin. (A + B + C)) \\
 &+ \frac{1}{2} e (d \sin. D + c \sin. (C + D) - b \sin. (B + C + D) - a \sin. (A + B + C + D))
 \end{aligned}$$

Im allgemeinen erhellet aus der Construction, daß die Glieder, deren Winkel grösser sind als 180, abgezogen, sind sie aber kleiner als 180°, addiret werden wüssen. Gesetzt, man hätte $A = B = C = D = 50^\circ$ so wären $(A + B + C) = (B + C + D) = 150^\circ$. folglich hätten die dritten Glieder das Zeichen +, aber $(A + B + C + D) = 200^\circ$ also hätte das letzte Glied das Zeichen (—), setzt man $a = b = c = d = e$, und $A = B$ etc. $= 60^\circ$, so hat man den Flächen - Inhalt eines regulären Sechsecks $= \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$.

Setzt man $a = b = c$ etc. und auch $A = B = C$ etc., doch so, daß $A + \dots + N$ keiner ist als 180°, so hat man ein Segment eines regulären Poligons, mittels dessen man verschiedene Reihen von Sinus summiren kann.

LXXVI. Aufgabe. Man soll einen gegebenen Winkel in drey gleiche Theile theilen.

Auflösung. Diese Aufgabe kann nur auf eine mechanische Art folgendermaassen aufgelöset werden.

Mit einem Radius CB (Fig. 27.) beschreibe man einen Kreis. Man errichte die Axe CH, und auf einem Lineale mache man $KG = 2 CB$.

Es sey ACB der zu theilende Winkel. Man lege das Lineal so, daß der auf demselben bezeichnete Punkt G in der Fortsetzung des Diameter BL, der andere Punkt K in der Axe AH liege, und die Flucht des Lineals die Spitze des zu theilenden Winkels berühre, dann ist der Winkel $AGB = \frac{1}{3} ACB$.

Beweis. Es sey $GF = FK = CB$; man ziehe CF; da das Dreyeck KGC rechtwinklicht ist, so ist $CF = GF = FK$, die Dreyecke GFC, FCA sind demnach gleichschenklicht, und der Winkel $AFC = FAC = 2FGC$.

Der Winkel ACB als ein äußerer ist gleich dem Winkel AGC mehr dem Winkel GAC $= 3 AGC$.

LXXVII. Aufgabe. Einen Winkel von beliebiger Gröfse zu construiren.

Auflösung. Auf einer Linie (Fig. 28) nehme man acht gleiche Theile, und mit dem Radius $AC =$ vier solcher Theile, beschreibe man einen Halbkreis.

Von A nach D trage man sieben solche Theile, und mit CD beschreibe man einen Kreisbogen. Auf demselben trage man eine Sehne $DE = AC = 4$, und ziehe EC, welche den Kreis AB in G schneidet.

Von G nach F trage man eine Sehne $GF = \frac{3}{4} AC$, und ziehe CF, so ist der Winkel $ACF = 65^\circ$.

Beweis. Der Sinus des halben Winkels $DCE = \frac{2}{11}$; $\text{Cos. } \frac{1}{2} DCE = \frac{\sqrt{117}}{11}$. Ferner $\text{Sin. } \frac{1}{2} GCF = \frac{3}{8}$; $\text{Cos. } \frac{1}{2} GCF = \frac{\sqrt{55}}{8}$ also

$$\text{Sin. } \frac{1}{2} (ACG + GCF) = \text{Sin. } \frac{1}{2} ACF = \frac{3 \sqrt{117} + 2 \sqrt{55}}{88} = 0,5372995$$

$= \text{Sin. } 32^\circ, 30'$. Nun ist nach unsern Tafeln: $\text{Sin. } 32^\circ, 30' = 0,537299 \frac{2}{3}$; also ist $ACF = 65^\circ$,

Sehneidet man von ACF einen Winkel von 60° ab, so hat man den Winkel von 5° ; zieht man von 65° , 54° ab, so hat man den Winkel von 11° , schneidet man 65° von 72° ab, so hat man den Winkel von 7° und so weiter.

LXXVIII. Aufgabe. Zu zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportional - Linien zu finden.

Auflösung. Man verschaffe sich einen Winkel - Hacken von 60° , dessen Schenkel (Fig. 29) von der Spitze aus genau getheilt sind.

Es seyen AC und CB die gegebenen Linien zu welchen zwey mittlere Proportional - Linien gesucht werden.

Man mache $GCA = GCF = FCB = 60^\circ$. Nun lege man das getheilte Winkelmaafs so, daß die Schenkel in A und B seyen, und die Linien GC, FC von denselben gleiche Theile HD, HE abschneiden, so sind DC, EC die gesuchten mittleren Proportional-Linien.

Beweis. Das Dreyeck HDE ist gleichschenkligh, und da der Winkel $DHE = 60^\circ$ ist, so ist er auch gleichseitig.

Nun ist der Winkel $CDH = DAC + DCA = DAC + 60^\circ$, also ist der Winkel $EDC = DAC$, folglich sind die Dreyecke ADC und EDC ähnlich.

Ebenso wird bewiesen, dafs die Dreyecke ECD und ECB ähnlich seyen; also ist $AC : CD = CD : CE = CE : CB$.

LXXIX. Aufgabe. Zwey Linien ab , cd (Fig. 30.) sind gegeben. Man soll sie so theilen, dafs ihre Segmente eine fortlaufende geometrische Progression bilden.

Auflösung. Man construire mit den gegebenen Linien ein rechtwinklichtes Dreyeck ABD . Mit einem Radius $= \frac{1}{2} AB$ beschreibe man einen Kreis. Er schneidet die Hypothense in einem Punkte C . Durch C ziehe man eine Parallele mit DB , und zum Punkte B eine Parallele mit DA , so ist $CF = BD$, und man hat:

$$EF : BE = BE : EC = EC : EA. \text{ und es ist } AD^2 = BD^2.$$

LXXX. Es ist dem angehenden Geometer ungemein nützlich, dafs er sich nicht nur in der Berechnung trigonometrischer Probleme übe, sondern auch, dafs er jeden möglichen Fall mit den gegebenen Gröfsen zu construiren wisse. Mit Zirkel und Lineal mufs er die zu berechnende Figur, und zwar so genau darzustellen im Stande seyn, dafs er die gesuchten Gröfsen ohne Calcul mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit angeben könne. Man hat nicht immer Tafeln und Transporteur bey sich; und dann ist der Genie- und der Artillerie-Offizier gelähmet, wenn er nicht in den Constructionen geübt ist. Allein, kann er einen Winkel von beliebiger Gröfse construiren, die Gröfse eines Winkels ohne Transporteur bestimmen, jeden Winkel in 3 Theile theilen, zu zwey Linien zwey mittlere Proportional-Gröfsen finden etc. so ist er nie in Verlegenheit, und er kann nützliche Dienste thun, wenn ihm auch der Feind die Bagage genommen hat.

Zweyte Abtheilung.

v o n

der Arithmetik der Sinuse.

I. Die zu einem Winkel coordinirten trigonometrischen Gröſſen können wie andere Gröſſen addiret, subtrahiret, multipliziret und dividiret werden; allein diese Operationen werden langweilig und beschwerlich, wenn man ihrer viele zu behandeln hat, weil sie durch Zahlen gegeben sind, die 7 und mehrere Dezimalen haben. Es ist also ein groſſer Vorthail Methoden zu haben, wodurch diese Berechnungen mit wenigen Zahlen geführt werden mögen. Der Inbegriff dieser Methoden wird die Arithmetik der Sinus genannt.

II. Aufgabe, Man soll die Reihe $\text{Sin. } B + \text{Sin. } 3 B + \text{Sin. } 5 B + \text{Sin. } (2 n - 1) B$ summiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 1.) der Bogen $AB = 2 B = AC = BD = EC$ und so weiter.

Man ziehe die Sehnen $AD, CF, EH, GK \dots$ auch $AB, CD, EF \dots$ etc.

Von B ziehe man auf IL die senkrechte BS , und mit BS ziehe man DM, FN, HP, KQ paralell; so ist $Ba = AB \text{ Sin. } BAD, = 2 \text{ Sin. } B. \text{ Sin. } B$; $ab = DM = CD \text{ Sin. } DCF = 2 \text{ Sin. } 3 B. \text{ Sin. } B$; $bc = FN = 3 \text{ Sin. } 5 B \text{ Sin. } B$; $cd = HP = 2 \text{ Sin. } 7 B \text{ Sin. } B$; $de = 2 \text{ Sin. } 9 B. \text{ Sin. } B \dots$ etc.

Man ziehe BI , so ist $BS = Ba + ab + bc + \dots de = BI \cdot \sin. BIL = 2 \sin. 5 B \cdot \sin. 5 B = 2 \sin.^2 5 B$, also: $\sin. B + \sin. 2 B + \dots \sin. 9 B = \sin.^2 5 B : \sin. B$.

Wenn nun $9 = 2n - 1$ ist, so ist $n = 5$, also ist;
 $\sin. B + \sin. 3 B + \sin. 5 B + \dots \sin. (2n - 1) B = (\sin.^2 (n B)) : \sin. B$.

III. Aufgabe. Die Reihe: $\sin. 2 A + \sin. 4 A + \dots \sin. n A$ zu summiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 2) $AB = 2 \sin. 2 B$; $BD = AC = DF = CF$, etc. $= 2 B$. Durch CD , EF etc. ziehe man parallele Sehnen, und dann AD , CF , EH etc., so ist $BM = 2 \sin. 2 B \cdot \sin. B$; $DN = 2 \sin. 4 B \cdot \sin. B$; $FP = 2 \sin. 6 B \cdot \sin. B \dots$ etc.

Es sey BS senkrecht auf IL , so ist $BS = 2 \sin. B (\sin. 2 B + \sin. 4 B + \sin. 6 B \dots \text{etc.})$

Es ist aber $BS = BI \cdot \sin. BIL = 2 \sin. \frac{1}{2} (\text{Arc } BI) \cdot \sin. \frac{1}{2} \text{Arc. } BL$.

Diesemnach ist $BS = 2 \sin. B (\sin. 2 B + \sin. 4 B + \sin. 6 B + \sin. 8 B + \sin. 10 B) = 2 \sin. \frac{1}{2} B \cdot \sin. \frac{10}{2} B$. Da nun hier $2n = 10$ ist, so ist $n = 5$, folglich $\sin. 2 B + \sin. 4 B + \sin. 6 B + \dots \sin. 2n B = (\sin. (n + 1) B \cdot \sin. n B) : \sin. B$.

IV. Aufgabe. $\sin. B + \sin. 2 B + \sin. 3 B + \sin. 4 B + \dots \sin. n B$ zu summiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 2) $AB = 2 B$; $BD = AC = DF = CE \dots = B$, so sind die Sehnen $AB = 2 \sin. B$; $CD = 2 \sin. 2 B$; $EF = 2 \sin. 3 B$; $GH = 2 \sin. 4 B$; $IK = 2 \sin. 5 B \dots$ etc. also $BM = 2 \sin. B \cdot \sin. \frac{1}{2} B$; $DN = 2 \sin. 2 B \cdot \sin. \frac{1}{2} B$; $\dots KR = 2 \sin. 5 B \cdot \sin. \frac{1}{2} B \dots$

Es ist aber $BM + DN + \dots KR = BS = 2 \sin. \frac{1}{2} \text{Arc } BI \cdot \sin. BIL = 2 \sin. \frac{5}{2} B \cdot \sin. \frac{5}{2} B$; also da $5 = n$ ist, so ist: $\sin. B + \sin. 2 B + \sin. 3 B + \dots \sin. n B = \frac{\sin. \frac{1}{2} (n + 1) B \cdot \sin. \frac{1}{2} n B}{\sin. \frac{1}{2} B}$.

V. Aufgabe. Die Reihe: $\text{Sin. } B - \text{Sin. } 2 B + \text{Sin. } 3 B - \text{Sin. } 4 B.$
 $\pm \text{Sin. } n B$ zu summiren.

Auflösung. Ist n eine gerade Zahl, so steht $(-)$ vor $\text{Sin. } n B$, und dann ist die Summe der abzuziehenden geraden Glieder größer, als die Summe der ungeraden, folglich muß diese von jener abgezogen werden. In diesem Falle muß man also die Zeichen der Glieder ändern, und allenthalben $(+)$ in $(-)$ und $(-)$ in $(+)$ verwandeln.

Die Summe der ungeraden Glieder ist oben gegeben worden.

Ist also n ungerade, so setze man $n = 2 m - 1$, und man hat

$$1.) \text{Sin. } B + \text{Sin. } 3 B + \text{Sin. } 5 B + \dots \text{Sin. } (2 m - 1) B = (\text{Sin. }^2 m B) : \text{Sin. } B.$$

Ist n gerade, so setze man $n = 2 m$, so ist

$$2.) \text{Sin. } 2 B + \text{Sin. } 4 B + \text{Sin. } 6 B + \dots \text{Sin. } 2 m B = (\text{Sin. } (m + 1) B. \text{Sin. } m B) : \text{Sin. } B.$$

Allein, wenn n ungerade ist, so hat man nur $(m - 1)$ gerade Glieder, folglich ist die Summe der geraden Glieder:

$$3.) \text{Sin. } 2 B + \text{Sin. } 4 B + \text{Sin. } 6 B + \dots \text{Sin. } 2 (m - 1) B = (\text{Sin. } (m - 1) B. \text{Sin. } m B) : \text{Sin. } B.$$

Es sey n ungerade, so ist $(\text{Sin. } B + \text{Sin. } 3 B + \text{Sin. } 5 B + \dots \text{Sin. } (2 m - 1) B) - (\text{Sin. } 2 B + \text{Sin. } 4 B + \text{Sin. } 6 B + \dots \text{Sin. } (2 (m - 1) B)$

$$= (\text{Sin. }^2 m B - \text{Sin. } (m - 1) B. \text{Sin. } m B) : \text{Sin. } B.$$

$$= \text{Sin. } m B. (\text{Sin. } m B - \text{Sin. } (m - 1) B) : \text{Sin. } B.$$

$$= \text{Sin. } m B. (\text{Sin. } \frac{1}{2} B. \text{Cos. } \frac{1}{2} (2 m - 1) B) : \text{Sin. } \frac{1}{2} B. \text{Cos. } \frac{1}{2} B.$$

$$= (\text{Sin. } m B. \text{Cos. } \frac{1}{2} (2 m - 1) B) : \text{Cos. } \frac{1}{2} B.$$

Es sey n gerade, so ist $(\text{Sin. } 2 B + \text{Sin. } 4 B + \text{Sin. } 6 B + \dots \text{Sin. } 2 m B) - (\text{Sin. } B + \text{Sin. } 3 B + \text{Sin. } 5 B + \dots \text{Sin. } (2 m - 1) B)$

$$= \text{Sin. } (m + 1) B. \text{Sin. } m B - \text{Sin. }^2 m B : \text{Sin. } B.$$

$$= \text{Sin. } m B (\text{Sin. } (m + 1) B - \text{Sin. } m B) : \text{Sin. } B.$$

$$= \text{Sin. } m B (2 \text{Sin. } \frac{1}{2} B. \text{Cos. } \frac{1}{2} (2 m + 1) B) : 2 \text{Sin. } \frac{1}{2} B \text{Cos. } \frac{1}{2} B.$$

$$= (\text{Sin. } m B. \text{Cos. } \frac{1}{2} (2 m + 1) B) : \text{Cos. } \frac{1}{2} B.$$

Substituirt man in beyden Gleichungen den Werth von n in m , so hat man, wenn D die erste, und D'' die zweyte Differenz - Reihe bedeutet,

$$D = (\sin. \frac{1}{2} (n+1) B. \cos. \frac{1}{2} n B) : \cos. \frac{1}{2} B; \text{ wenn } n \text{ ungerad ist.}$$

$$D'' = (\sin. \frac{1}{2} n B. \cos. \frac{1}{2} (n+1) B) : \cos. \frac{1}{2} B; \text{ (wenn } n \text{ gerade ist.)}$$

VI. Aufgabe. Die Reihe: $\cos. B + \cos. 3 B + \cos. 5 B + \dots \cos. (2n-1) B$ zu summiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 1.) $AB = BD = AC \text{ etc.} = 2 B$. Man ziehe die Parallelen $AB, CD, EF, \text{ etc.}$; dann $AD, CF \text{ etc.}$ so ist $Da = BD$. $\cos. BDA = 2 \sin. B. \cos. B. \dots FM = DE$. $\cos. DFC = 2 \sin. B. \cos. 3 B. \dots QL = KL$. $\cos. KLI = 2 \sin. B. \cos. 9 B. \dots$

Es ist aber $Da + FM + \dots QL = SL = BL$. $\cos. BLI$, also:
 $2 \sin. B. (\cos. B + \cos. 3 B + \dots \cos. 9 B) = 2 \sin. \frac{1}{2} B. \cos. \frac{1}{2} B$,
 folglich $\cos. B + \cos. 3 B + \dots \cos. (2n-1) B = (\sin. n B. \cos. n B) : \sin. B$.

VII. Aufgabe. Die Reihe: $\cos. 2 B + \cos. 4 B + \dots \cos. 2 n B$ zu summiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 2.) $AB = 4 B$; $BD, AC, DF \dots \text{ etc.} = 2 B$. so ist $DM = 2 \sin. B \cos. 2 B$; $FN = 2 \sin. B \cos. 4 B \dots RL = 2 \sin. B. \cos. 10 B$, somit $2 \sin. B (\cos. 2 B + \cos. 4 B + \dots \cos. 10 B) = 2 \sin. \frac{1}{2} B. \cos. \frac{1}{2} B$, und wenn $2 n = 10$.
 $\cos. 2 B + \cos. 4 B + \cos. 2 n B = (\sin. n B. \cos. (n+1) B) : \sin. B$.

VIII. Aufgabe. Die Reihe: $\cos. B + \cos. 2 B + \cos. 3 B + \cos. 4 B + \dots \cos. n B$ zu summiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 2.) $AB = 2 B$; $BD, AC, DF \text{ etc.} = B$, so ist $DM = 2 \sin. \frac{1}{2} B. \cos. B$; $FN = 2 \sin. \frac{1}{2} B \cos. 2 B \dots RL = 2 \sin. \frac{1}{2} B. \cos. 5 B. \text{ etc.}$

Nun ist: $DM + FN + HP + KQ + RL = \cancel{BL} = SL = BL$. $\cos. BLI$, folglich $2 \sin. \frac{1}{2} B (\cos. B + \cos. 2 B + \cos. 3 B + \cos. 4 B + \cos. 5 B = 2 \sin. \frac{1}{2} B. \cos. \frac{1}{2} B$, somit $\cos. B + \cos. 2 B + \dots \cos. n B = (\sin. \frac{1}{2} n B. \cos. \frac{1}{2} (n+1) B) : \sin. \frac{1}{2} B$.

IX. Aufgabe. Die Reihe: $\text{Cos. } B - \text{Cos. } 2B + \text{Cos. } 3B - \text{Cos. } 4B \dots$
 $+ \text{Cos. } mB$ zu summiren.

Auflösung. Ist m gerade, so hat es das Zeichen (—) vor sich; ist m ungerade, so hat es das Zeichen (+). Man setze für den ersten Fall $m = 2n$, so hat man, wenn D die Summe der Differenzen bedeutet:

1ter Fall: $(\text{Cos. } B + \text{Cos. } 3B + \text{Cos. } 5B + \dots \text{Cos. } (2n-1)B) -$
 $(\text{Cos. } 2B + \text{Cos. } 4B + \dots \text{Cos. } 2nB).$

2ter Fall: $(\text{Cos. } B + \text{Cos. } 3B + \text{Cos. } 5B + \dots \text{Cos. } (2n-1)B) -$
 $(\text{Cos. } 2B + \text{Cos. } 4B + \dots \text{Cos. } (2n-2)B).$

1ter Fall, $D = (\text{Sin. } nB \cdot \text{Cos. } nB - \text{Sin. } nB \cdot \text{Cos. } n+1) : \text{Sin. } B.$
 $= (\text{Sin. } nB (\text{Cos. } nB - \text{Cos. } n+1)) : \text{Sin. } B.$
 $= (\text{Sin. } \frac{1}{2} mB \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2} (m+1)B) : \text{Cos. } \frac{1}{2} B.$

2ter Fall, $D = (\text{Sin. } nB \cdot \text{Cos. } nB - \text{Sin. } (n-1)B \cdot \text{Cos. } nB) : \text{Sin. } B.$
 $= \text{Cos. } nB \cdot (\text{Sin. } nB - \text{Sin. } (n-1)B) : \text{Sin. } B.$
 $= (\text{Cos. } \frac{1}{2} (m+1)B \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} mB) : \text{Cos. } \frac{1}{2} B.$

Anmerkung. Man setze $B = \frac{\pi}{2m+1}$, das ist, es sey der Winkel
 B der $(2m+1)$ Theil der Periferie, so ist:

$$\text{Cos. } \frac{\pi}{2m+1} - \text{Cos. } \frac{2\pi}{2m+1} + \text{Cos. } \frac{3\pi}{2m+1} \dots + \text{Cos. } \frac{m\pi}{2m+1}$$

$$= (\text{Cos. } \frac{1}{2} \frac{\pi}{2m+1} + \text{Cos. } \frac{1}{2} \pi) : \text{Cos. } \frac{1}{2} \frac{\pi}{2m+1} = \frac{1}{2}.$$

Dieser Lehrsatz wird in der Folge durch geometrische Construction
 besonders erwiesen werden, und ist der Schlüssel zu vielen Verhältnissen,

X. Aufgabe. Die Reihe: $\text{Sin. } A + \text{Sin. } (A+dB) + \text{Sin. } (A+2dB) +$
 $\text{Sin. } (A+(n-1)dB)$ zu finden.

Auflösung. Es sey $d = 5$; $n = 4$. Ferner $AB = 2A$, und jeder
 der übrigen mit Ziffer bezeichneten kleinen Bögen $= B$:

Diesemnach ist die Sehne $AB = 2 \sin. A$; $DE. = 2 \sin. (A + 5 B)$; $GL = 2 \sin. (A + 10 B)$; $HM = 2 \sin. (A + 15 B) \dots$ etc.

Man ziehe die senkrechten BC , DF , GK , auf die Sehnen AD , EG etc. so ist $BC = \sin. \frac{5}{2} B. \sin. A$, $DF = 2 \sin. \frac{5}{2} B. \sin. (A + 5 B)$; $GK = 2 \sin. \frac{5}{2} B. \sin. (A + 10 B)$; $HN = 2 \sin. \frac{5}{2} B. \sin. (A + 15 B)$.

Nun ist $BC + DF + GK + HN = BR = BM. \sin. BMN$, also ist:
 $\sin. A + \sin. (A + 5 B) + \sin. (A + 10 B) + \sin. (A + 15 B) =$
 $(\sin. (A + \frac{15}{2} B). \sin. \frac{20}{2} B) : \sin. \frac{5}{2} B.$
 und $\sin. A + \sin. (A + d B) + \sin. (A + 2 d B) + \dots \sin. (A + (n-1) d B) =$
 $(\sin. (A + \frac{1}{2} (n-1) d B). \sin. \frac{1}{2} d n B) : \sin. \frac{1}{2} d B.$

XI. Diese Formel ist allgemein, und die Summe jeder Reihe von Sinus, deren Winkel eine Progression nach Differenzen bilden, kann durch dieselbe bestimmt werden. Es sey;

$d = 1$; so ist: $\sin. A + \sin. (A + B) + \sin. (A + 2 B) + \dots$
 $\sin. (A + (n-1) B) = (\sin. (A + \frac{1}{2} (n-1) B). \sin. \frac{1}{2} n B) : \sin. \frac{1}{2} B.$

$d = 2$, so ist: $\sin. A + \sin. (A + 2 B) + \sin. (A + 4 B) + \dots$
 $\sin. (A + 2 (n-1) B) = (\sin. (A + (n-1) B). \sin. n B) : \sin. B.$

$d = 3$, so ist: $\sin. A + \sin. (A + 3 B) + \sin. (A + 6 B) + \dots$
 $\sin. (A + 3 (n-1) B) = (\sin. (A + \frac{3}{2} (n-1) B). \sin. \frac{3}{2} n B) : \sin. \frac{3}{2} B.$

Man vergrößere jeden Winkel um B ; so ist:

$\sin. (A + B) + \sin. (A + 4 B) + \sin. (A + 7 B) + \dots \sin. (A + (3n-2) B) =$
 $(\sin. (A + \frac{3(n-1)}{2} B). \sin. \frac{3}{2} n B) : \sin. \frac{3}{2} B.$

Man vermindere jeden Winkel um B ; so ist:

$\sin. (A - B) + \sin. (A + 2 B) + \sin. (A + 5 B) + \dots \sin. (A + (3n-4) B) =$
 $(\sin. (A + \frac{3n-5}{2} B). \sin. \frac{3}{2} n B) : \sin. \frac{3}{2} B.$

XII. Eben dieses Resultat kann blos durch Rechnung gefunden werden. Man multiplizire jedes Glied der gegebenen Reihe mit $\sin. \frac{1}{2} d B$, also hier mit $\sin. \frac{3}{2} B$, so hat man, wenn man $n = 5$ setzt,

$$\left. \begin{aligned} \sin. (A - B). \sin. \frac{5}{2} B &= \cos. (A - \frac{5}{2} B) - \cos. (A + \frac{1}{2} B) \\ \sin. (A + 2 B). \sin. \frac{5}{2} B &= \cos. (A + \frac{1}{2} B) - \cos. (A + \frac{7}{2} B) \\ \sin. (A + 5 B). \sin. \frac{5}{2} B &= \cos. (A + \frac{7}{2} B) - \cos. (A + \frac{13}{2} B) \\ \sin. (A + 8 B). \sin. \frac{5}{2} B &= \cos. (A + \frac{13}{2} B) - \cos. (A + \frac{19}{2} B) \\ \sin. (A + 11 B). \sin. \frac{5}{2} B &= \cos. (A + \frac{19}{2} B) - \cos. (A + \frac{25}{2} B) \end{aligned} \right\} : 2.$$

$$\begin{aligned} \text{also } \sin. (A - B) + \sin. (A + 2 B) + \dots + \sin. (A + 11 B) \\ = (\cos. (A - \frac{5}{2} B) - \cos. (A + \frac{25}{2} B)) : 2 \sin. \frac{5}{2} B, \\ = (\sin. (A + \frac{19}{2} B) \cdot \sin. \frac{15}{2} B) : \sin. \frac{5}{2} B. \end{aligned}$$

für 5 substituirt $n = \sin. (A + (3n - 5) B) \cdot \sin. \frac{3n}{2} B : \sin. \frac{5}{2} B.$

Allein auf diesem Wege sieht man doch nie, wie und warum man zu diesem Resultate gekommen ist.

Anmerkung. Die Summe der Differenzen der Sinus, die Summe der Cosinus und ihrer Differenzen findet man wohl ohne ferneren Unterricht.

XIII. Aufgabe. Die Reihe: $\sin. A + 2 \sin. (A + B) + 3 \sin. (A + 2 B) + n \sin. (A + (n - 1) B) = S$ zu summiren.

Auflösung. Diese Reihe kann in die folgenden zerlegt werden.

$$\begin{aligned} \sin. A + \sin. (A + B) + \sin. (A + 2 B) + \sin. (A + 3 B) + \sin. (A + 4 B) + \dots \\ \sin. (A + (n - 1) B) = M. \\ + \sin. (A + B) + \sin. (A + 2 B) + \sin. (A + 3 B) + \sin. (A + 4 B) + \dots \\ \sin. (A + (n - 1) B) = N. \\ + \sin. (A + 2 B) + \sin. (A + 3 B) + \sin. (A + 4 B) + \dots + \sin. (A + (n - 1) B) = P. \\ + \sin. (A + 3 B) + \sin. (A + 4 B) + \dots + \sin. (A + (n - 1) B) = Q \\ + \sin. (A + 4 B) + \dots + \sin. (A + (n - 1) B) = R. \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Man hat n solcher Reihen, und die Summe jeder Reihe kann aus der ersten abgeleitet werden, denn es ist $M = (\sin. (A + \frac{1}{2} (n - 1) B) \cdot \sin. \frac{1}{2} n B) : \sin. \frac{1}{2} B.$ Setzt man in diese für A , $(A + B)$ und $(n - 1)$ für n so hat man N , und setzt man $(A + 2 B)$ für A , $(n - 2)$ für n , so hat man P und so weiter.

Man hat also, wenn $n = 5$ gesetzt wird,

$$M = (\sin. (A - \frac{1}{2} (n-1) B), \sin. \frac{1}{2} n B) : \sin. \frac{1}{2} B = (\cos. (A - \frac{1}{2} B) - \cos. (A + \frac{3}{2} B) : 2 \sin. \frac{1}{2} B.$$

$$N = (\sin. (A + \frac{1}{2} (n-1) B), \sin. \frac{1}{2} (n-1) B) : \sin. \frac{1}{2} B = (\cos. (A + \frac{1}{2} B) - \cos. (A + \frac{5}{2} B) : 2 \sin. \frac{1}{2} B.$$

$$P = (\sin. (A + \frac{1}{2} (n+1) B), \sin. \frac{1}{2} (n-2) B) : \sin. \frac{1}{2} B = (\cos. (A + \frac{3}{2} B) - \cos. (A + \frac{7}{2} B) : 2 \sin. \frac{1}{2} B.$$

$$Q = (\sin. (A + \frac{1}{2} (n+2) B), \sin. \frac{1}{2} (n-3) B) : \sin. \frac{1}{2} B = (\cos. (A + \frac{5}{2} B) - \cos. (A + \frac{9}{2} B) : 2 \sin. \frac{1}{2} B.$$

$$R = (\sin. (A + \frac{1}{2} (n+3) B), \sin. \frac{1}{2} (n-4) B) : \sin. \frac{1}{2} B = (\cos. (A + \frac{7}{2} B) - \cos. (A + \frac{11}{2} B) : 2 \sin. \frac{1}{2} B.$$

Es ist also:

$$S = \frac{\cos. (A - \frac{1}{2} B) + \cos. (A + \frac{1}{2} B) + \cos. (A + \frac{3}{2} B) + \dots - 5 \cos. (A + \frac{9}{2} B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B}.$$

Es ist aber: $\cos. (A - \frac{1}{2} B) + \cos. (A + \frac{1}{2} B) + \dots + \cos. (A + \frac{7}{2} B) = (\sin. \frac{5}{2} B \cos. (A + \frac{1}{2} (5-2) B)) : \sin. \frac{1}{2} B$, also:

$$S = \frac{(\sin. \frac{5}{2} B \cos. (A + \frac{1}{2} (5-2) B))}{2 \sin. \frac{1}{2} B} - \frac{5 \cos. (A + \frac{9}{2} B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B} \text{ und für}$$

$$5 = n, S = \frac{\sin. \frac{1}{2} n B \cos. (A + \frac{1}{2} (n-2) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B} - \frac{n \cos. (A + \frac{1}{2} (2n-1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B}.$$

XIV. Aufgabe. Die Reihe: $\sin. A + 3 \sin. (A + 2B) + 5 \sin. (A + 3B) + \dots + (2n-1) \sin. (A + (n-1) B) = S$ zu summiren.

Auflösung. Die gegebene Reihe kann in zwey andere zerlegt werden.

$$\sin. A + 2 \sin. (A + B) + 3 \sin. (A + 2B) + 4 \sin. (A + 3B) + \dots + n \sin. (A + (n-1) B) = M.$$

$$\sin. (A + B) + 2 \sin. (A + 2B) + 3 \sin. (A + 3B) + \dots + (n-1) \sin. (A + (n-1) B) = N.$$

$$\text{Nun ist } M = \frac{\sin. \frac{1}{2} n B \cos. (A + \frac{1}{2} (n-2) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B} - \frac{n \cos. (A + \frac{1}{2} (2n-1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B}.$$

Setzt man in dieser Formel $(A + B)$ für A ; $(n-1)$ für n , so hat man

$$N = \frac{\sin. \frac{1}{2} (n-1) B \cos. (A + \frac{1}{2} (n-1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B} - \frac{(n-1) \cos. (A + \frac{1}{2} (2n-1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B}.$$

also

$$M + N = \frac{\sin. \frac{1}{2} n B. \cos. (A + \frac{1}{2} (n-2) B) + \sin. \frac{1}{2} (n-1) B. \cos. \frac{1}{2} n - 1) B}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B.} \\ - \frac{(2 n - 1). \cos. (A + \frac{1}{2} (2 n - 1) B.}{2 \sin. \frac{1}{2} B.}$$

XV. Aufgabe. Die Reihe: $\sin. A + 3 \sin. (A + B) + 6 \sin. (A + 2 B) + \dots + \frac{1}{2} (n. n + 1). \sin. (A + (n - 1) B = S$ zu summiren.

Auflösung. Man zerlege diese Reihe, wie die vorige.

$$\sin. A + 2 \sin. (A + B) + 3 \sin. (A + 2 B) + 4 \sin. (A + 3 B) + 5 \sin. (A + 4 B) \\ \dots + n \sin. (A + (n - 1) B) = M \\ \sin. (A + B) + 2 \sin. (A + 2 B) + 3 \sin. (A + 3 B) + 4 \sin. (A + 4 B) \\ \dots + (n - 1). \sin. (A + (n - 1) B) = N \\ + \sin. (A + 2 B) + 2 \sin. (A + 3 B) + 3 \sin. (A + 4 B) \\ \dots + (n - 2) \sin. (A + (n - 1) B) = P \\ \sin. (A + 3 B) + 2 \sin. (A + 4 B) \dots + (n - 3). \sin. (A + (n - 1) B) = Q \\ \sin. (A + 4 B) \dots + (n - 4). \sin. (A + (n - 1) B) = R$$

Der Werth von M ist bekannt. Man findet N , wenn man in M $(A + B)$ für A , und $(n - 1)$ für n setzt. Eben so leitet man P aus N ab.

$$M = \frac{\sin. \frac{1}{2} n B. \cos. (A + \frac{1}{2} (n - 2) B}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B.} - \frac{n \cos. (A + \frac{1}{2} (2 n - 1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B.} \\ = \frac{\frac{1}{2} \sin. (A + (n - 1) B) - \sin. (A - B)}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B.} - \frac{n \cos. (A + \frac{1}{2} (2 n - 1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B.} \\ N = \frac{\sin. \frac{1}{2} (n - 1) B. \cos. (A + \frac{1}{2} (n - 1) B)}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B.} - \frac{(n - 1) \cos. (A + \frac{1}{2} (2 n - 1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B.} \\ = \frac{\frac{1}{2} (\sin. (A + (n - 1) B) - \sin. A)}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B.} - \frac{(n - 1). \cos. (A + \frac{1}{2} (2 n - 1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B.} \\ P = \frac{\sin. \frac{1}{2} (n - 2) B. \cos. (A + \frac{1}{2} n B)}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B.} - \frac{(n - 2). \cos. (A + \frac{1}{2} (2 n - 1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B.} \\ = \frac{\frac{1}{2} (\sin. (A + (n - 1) B) - \sin. A + B)}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B.} - \frac{(n - 2). \cos. (A + \frac{1}{2} (2 n - 1) B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B.}$$

Q

$$Q = \frac{\sin. \frac{1}{2}(n-3)B \cdot \cos. (A + \frac{1}{2}(n+1)B)}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B} - \frac{(n-3) \cos. (A + \frac{1}{2}(2n-1)B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin. (A + (n-1)B) - \sin. (A + 2B))}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B} - \frac{(n-3) \cdot \cos. (A + \frac{1}{2}(2n-1)B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B}$$

$$R = \frac{\sin. \frac{1}{2}(n-4)B \cdot \cos. (A + \frac{1}{2}(n+2)B)}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B} - \frac{(n-4) \cdot \cos. A + \frac{1}{2}(2n-1)B}{2 \sin. \frac{1}{2} B}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin. (A + (n-1)B) - \sin. (A + 3B))}{2 \sin. ^2 \frac{1}{2} B} - \frac{(n-4) \cdot \cos. A + \frac{1}{2}(2n-1)B}{2 \sin. \frac{1}{2} B}$$

Es ist also:

$$S = \frac{n \sin. (A + (n-1)B) - (\sin. (A-B) + \sin. A + \sin. (A+B))}{4 \sin. ^2 \frac{1}{2} B}$$

$$\dots + \frac{\sin. A + (n-2)B}{4 \sin. ^2 \frac{1}{2} B} - \frac{n \cdot n + 1 \cdot \cos. (A + \frac{1}{2}(2n-1)B)}{4 \sin. \frac{1}{2} B}$$

und da $\sin. (A-B) + \sin. A + \sin. (A+B) + \dots + \sin. (A + (n-2)B) = (\sin. \frac{1}{2}nB \cdot \sin. (A + \frac{1}{2}(n-3)B)) : \sin. \frac{1}{2}B$, so ist:

$$S = \frac{n \sin. (A + (n-1)B)}{4 \sin. ^2 \frac{1}{2} B} - \frac{\sin. \frac{1}{2}nB \cdot \sin. (A + \frac{1}{2}(n-3)B)}{4 \sin. ^3 \frac{1}{2} B}$$

$$- \frac{n \cdot n + 1 \cdot \cos. (A + \frac{1}{2}(2n-1)B)}{4 \sin. \frac{1}{2} B}$$

Anmerkung. Diese Gleichung giebt $S = \sin. A$, wenn $n = 1$ gesetzt wird. Auf diese Art können alle Reihen der Sinus und Cosinus summirt werden, in denen die Coeffizienten der Glieder figurirte Zahlen oder Potenzen von was immer für einer Ordnung sind; und hier wird jedem die Aehnlichkeit auffallen, die man zwischen diesen Formeln und denen wahrnimmt, welche man erhält, wenn man Reihen aus geometrischen Progressionen und figurirten Zahlen zusammensetzt. Das Fundament dieser Relation ist noch nicht entdeckt; und somit irren sich die französischen Geometer ungemein, wenn sie behaupten, sie hätten keine terram incognitam im Gebiete der Geometrie übrig gelassen.

XVI. Der Professor Gaus hat in seiner Theorie der Bewegung der Planeten die folgende Gleichung:

$$\sin. A. \sin. (C - B) + \sin. C. \sin. (B - A) + \sin. B. \sin. (A - C) = 0.$$

Da nun A, B, C spitze Winkel bedeuten, so kann die Differenz zweyer derselben in keinem Falle negativ seyn; also ist diese Gleichung falsch, denn alle Factoren sind positiv, und die Summe dreier positiven Produkte kann nie null seyn. Wie dieses nun zusammenhange, weiset die Construction.

Es sey (Fig. 4.) $AB = 2 \sin. A$; $AD = 2 \sin. B$; $DC = 2 \sin. C$. Man ziehe CE mit AD paralell: dann BG und DH senkrecht auf CE , endlich $CB = AD = 2 \sin. B$, so ist $ED = 2 \sin. (B - A)$; $BD = 2 \sin. (C - B)$; $BE = 2 \sin. (C - A)$.

Nun ist $BI + GI = BI + DH = BG$, und $BI = BD \sin. BDA = 2 \sin. (C - B). \sin. A$; $GI = DH = DE \sin. DEC = 2 \sin. (B - A). \sin. C$; $BG = BE \sin. BEC. = 2 \sin. (C - A). \sin. B$, also ist:
 $\sin. (C - B). \sin. A + \sin. (B - A). \sin. C = \sin. (C - A). \sin. B$,
 und da auch $DI + EH = GE$ ist:

$$\sin. (C - B). \cos. A + \sin. (B - A). \cos. C = \sin. (C - A). \cos. B.$$

Der Fehler, den unsere algebristischen Geometer begehen, besteht darin, dafs sie die Gröfsen, mit welchen sie rechnen, nicht gehörig bestimmen. Wenn A, B, C drey ungleiche Winkel bedeuten, so mufs einer der grösste, einer der kleinste, und einer der mittlere seyn. Wird nicht bestimmt, welcher der grösste oder der kleinste sey, so sind alle Verhältnisse unbestimmt, und man mufs auf unbestimmte, ungereimte Resultate gelangen.

In der sphärischen Trigonometrie wird auch diese genaue Bestimmung nothwendig, um den zahlreichen Aequivokationen auszuweichen, und eben darum hat der Verfasser immer den gröfseren Winkel durch a ; die gröfsere Seite durch A bezeichnet.

XVII. Es wird in der Geometrie gefodert, die einem Winkel A coordinirten Gröfsen in Faktoren zu zerlegen; allein man fodert nicht Faktoren von was immer von einer Form, sondern man verlangt, dafs z. B.

$\text{Sin. } n A$ in n Faktoren zerlegt werde, die sämmtlich Sinuse seyen. Es ist $\text{Sin. } 3 A = (3 - 4 \text{ Sin. }^2 A) \cdot \text{Sin. } A$. Da sind nun $\text{Sin. } A$; $\sqrt{3 + 2 \text{ Sin. } A}$; $\sqrt{3 - 2 \text{ Sin. } A}$ drey Faktoren, deren Produkt $\text{Sin. } 3 A$ giebt, allein diese sind es nicht, welche man sucht; sie müssen von derselben Form seyn, wie die zu zerlegende Gröfse; und somit sind die drey Faktoren:

$$\text{Sin. } A, \text{ Sin. } \left(\frac{2}{3} \pi - A\right) \text{ und } \text{Sin. } \left(\frac{2}{3} \pi + A\right).$$

Dafs diese verlangte Faktoren keine Elementar - Faktoren seyen, erhellet daraus, dafs jeder derselben in zahllose Faktoren zerlegt werden könne. Dafs eine solche Zerlegung möglich sey, hat man schon längst durch tatoniren gefunden; bewiesen hatte es noch Niemand, weil man den Lehrsatz nicht kannte; welcher der Schlüssel zu diesen Verhältnissen ist.

XVIII. Wenn π die halbe Periferie bedeutet, so ist,

$$2 \text{ Cos. } \frac{\pi}{2n+1} - 2 \text{ Cos. } \frac{2\pi}{2n+1} + 2 \text{ Cos. } \frac{3\pi}{2n+1} \dots \mp 2 \text{ Cos. } \frac{n\pi}{2n+1} = 1.$$

Beweis. Es sey der Winkel $BAC = \frac{1}{5} \pi$ (Fig. 5.) also $n = 4$; $AD = DE = EF = GH = 1$; so hat man vier gleichschenkligte Dreyecke, und es ist: $AE = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{5} \pi$; $DF = 2 \text{ Cos. } \frac{2}{5} \pi$; $EG = 2 \text{ Cos. } \frac{3}{5} \pi$; $HF = 2 \text{ Cos. } \frac{4}{5} \pi$; auch ist $AH = AG$; denn da der Winkel $AHG = \frac{4}{5} \pi$, der Winkel $BAC = \frac{1}{5} \pi$, so ist der Winkel $AGH = \pi - \frac{5}{5} \pi = \frac{4}{5} \pi$; also ist das Dreyeck AGH gleichschenkligt, und somit; $AD + ED + FH = AE + EG$, oder $1 + 2 \text{ Cos. } \frac{2}{5} \pi + 2 \text{ Cos. } \frac{4}{5} \pi = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{5} \pi + 2 \text{ Cos. } \frac{3}{5} \pi$, folglich $2 \text{ Cos. } \frac{1}{5} \pi - 2 \text{ Cos. } \frac{2}{5} \pi + 2 \text{ Cos. } \frac{3}{5} \pi - 2 \text{ Cos. } \frac{4}{5} \pi = 1$, und allgemein:

$$2 \text{ Cos. } \frac{\pi}{2n+1} - 2 \text{ Cos. } \frac{2\pi}{2n+1} + 2 \text{ Cos. } \frac{3\pi}{2n+1} \dots \mp 2 \text{ Cos. } \frac{n\pi}{2n+1} = 1.$$

Anmerkung. Durch zweckmäßige Substitution können eine Menge anderer Verhältnisse aus diesen abgeleitet werden. Einige derselben werden in der Folge vorkommen.

XIX. Wenn die Periferie eines Kreises in $(2n + 1)$ gleiche Theile getheilet wird, und es bedeutet z einen Kreisbogen, welcher kleiner ist als ein solcher Theil, so ist immer;

$$\begin{aligned} & \sin. z + \sin. \frac{(\pi}{2n+1} - z) + \sin. \frac{(2\pi}{2n+1} + z) + \sin. \frac{(n-1)\pi}{2n+1} + z + \sin. \frac{(n\pi)}{2n+1} - z \\ &= \sin. \frac{(\pi}{2n+1} + z) + \sin. \frac{(2\pi}{2n+1} - z) + \sin. \frac{(n-1)\pi}{2n+1} - z + \sin. \frac{(n\pi)}{2n+1} + z \end{aligned}$$

Beweis. Es sey der Kreis (Fig. 6.) in 7 Theile getheilt, also $n = 3$. somit $AB = BC \text{ etc.} = 2 \sin. \frac{1}{7} \pi$. Es sey $AK = z$; und von K aus trage man die Punkte $a, b, c, \text{ etc.}$, so, daß auch $Ka = ab = 2 \sin. \frac{1}{7} \pi$, so ist, $AK = 2 \sin. z$; $KG = 2 \sin. (\frac{1}{7} \pi - z)$; $Af = 2 \sin. (\frac{1}{7} \pi + z)$; $Ga = 2 \sin. (\frac{2}{7} \pi - z)$; $Bf = 2 \sin. (\frac{2}{7} \pi + z)$; $Fa = 2 \sin. (\frac{3}{7} \pi - z)$; $Fb = 2 \sin. (\frac{3}{7} \pi + z)$. Nun ist:

- 1) $Fb = Bf + 2Ff \cdot \cos. b Ff$; $\sin. (\frac{3}{7} \pi + z) = \sin. (\frac{2}{7} \pi + z) + 2 \sin. (\frac{1}{7} \pi - z) \cdot \cos. \frac{3}{7} \pi$.
- 2) $Af = Fa - 2Ff \cdot \cos. a Ff$; $\sin. (\frac{1}{7} \pi + z) = \sin. (\frac{3}{7} \pi - z) - 2 \sin. (\frac{1}{7} \pi - z) \cdot \cos. \frac{2}{7} \pi$.
- 3) $Ga = AK + 2KG \cdot \cos. KGa$; $\sin. (\frac{2}{7} \pi - z) = 2 \sin. z + 2 \sin. (\frac{5}{7} \pi - z) \cdot \cos. \frac{1}{7} \pi$.

Da nun $2 \cos. \frac{1}{7} \pi - 2 \cos. \frac{2}{7} \pi + 2 \cos. \frac{3}{7} \pi = 1$ ist, so ist die Summe der drey letzten Glieder $= \sin. (\frac{1}{7} \pi - z)$; also ist erwiesen, was zu erweisen war.

XX. Auch der folgende Beweis kann gegeben werden.

Es ist: 1.) $\sin. z = \sin. z$.

2.) $\sin. (\frac{1}{7} \pi - z) = \sin. \frac{1}{7} \pi \cos. z - \cos. \frac{1}{7} \pi \sin. z$

3.) $\sin. (\frac{2}{7} \pi + z) = \sin. \frac{2}{7} \pi \cos. z + \cos. \frac{2}{7} \pi \sin. z$

4.) $\sin. (\frac{3}{7} \pi - z) = \sin. \frac{3}{7} \pi \cos. z - \cos. \frac{3}{7} \pi \sin. z$

5.) $\sin. (\frac{1}{7} \pi + z) = \sin. \frac{1}{7} \pi \cos. z + \cos. \frac{1}{7} \pi \sin. z$

6.) $\sin. (\frac{2}{7} \pi - z) = \sin. \frac{2}{7} \pi \cos. z - \cos. \frac{2}{7} \pi \sin. z$

7.) $\sin. (\frac{3}{7} \pi + z) = \sin. \frac{3}{7} \pi \cos. z + \cos. \frac{3}{7} \pi \sin. z$

Zieht man Nro. 5, 6, 7, von 1, 2, 3, 4 ab, so bleibt: $\sin. z (1 - 2 \cos. \frac{1}{7} \pi + 2 \cos. \frac{2}{7} \pi - 2 \cos. \frac{3}{7} \pi) = 0$. also sind die Summen der drey letzten Glieder der Summe der vier ersten gleich.

XXI. Wenn alles bleibt, wie zuvor, so ist:

R

$$2 \sin. (2n+1)z = 2 \sin. z. 2 \sin. \left(\frac{\pi}{2n+1} - z \right). 2 \sin. \left(\frac{\pi}{2n+1} + z \right) \dots$$

$$\times 2 \sin. \left(\frac{n\pi}{2n+1} - z \right). 2 \sin. \left(\frac{n\pi}{2n+1} + z \right).$$

Beweis. Es sey $n = 3$, so ist:

$$\sin. 7z = (64 \cos.^6 z - 80 \cos.^4 z + 24 \cos.^2 z - 1). \sin. z$$

$$= 2^7 - 1 (\cos.^6 z - \frac{5}{4} \cos.^4 z + \frac{5}{16} \cos.^2 z - \frac{1}{64}). \sin. z.$$

Man multiplizire Nro. XX.

$$\text{No. 2. No. 5.} = \sin.^2 \frac{1}{7} \pi \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{1}{7} \pi \sin.^2 z = \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{1}{7} \pi.$$

$$\text{No. 3. No. 6.} = \sin.^2 \frac{2}{7} \pi \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{2}{7} \pi \sin.^2 z = \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{2}{7} \pi.$$

$$\text{No. 4. No. 7.} = \sin.^2 \frac{3}{7} \pi \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{3}{7} \pi \sin.^2 z = \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{3}{7} \pi.$$

Nun ist das Produkt dieser drey Gröfsen:

$$\cos.^6 z - \cos.^4 z (\cos.^2 \frac{1}{7} \pi + \cos.^2 \frac{2}{7} \pi + \cos.^2 \frac{3}{7} \pi)$$

$$+ \cos.^2 z (\cos.^2 \frac{1}{7} \pi \cos.^2 \frac{2}{7} \pi + \cos.^2 \frac{1}{7} \pi \cos.^2 \frac{3}{7} \pi + \cos.^2 \frac{2}{7} \pi \cos.^2 \frac{3}{7} \pi)$$

$$- \cos.^2 \frac{1}{7} \pi \cos.^2 \frac{2}{7} \pi \cos.^2 \frac{3}{7} \pi.$$

$$\text{Es ist aber: } \cos.^2 \frac{1}{7} \pi = (1 + \cos. \frac{2}{7} \pi) : 2$$

$$\cos.^2 \frac{2}{7} \pi = (1 + \cos. \frac{4}{7} \pi) : 2 = (1 - \cos. \frac{3}{7} \pi) : 2.$$

$$\cos.^2 \frac{3}{7} \pi = (1 + \cos. \frac{6}{7} \pi) : 2 = (1 - \cos. \frac{1}{7} \pi) : 2, \text{ also}$$

$$\cos.^2 \frac{1}{7} \pi + \cos.^2 \frac{2}{7} \pi + \cos.^2 \frac{3}{7} \pi = (3 - \cos. \frac{1}{7} \pi + \cos. \frac{2}{7} \pi - \cos. \frac{3}{7} \pi) : 2 = (3 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{5}{4}$$

Ferner ist:

$$1.) \cos.^2 \frac{1}{7} \pi \cos.^2 \frac{2}{7} \pi = (\cos. \frac{1}{7} \pi + \cos. \frac{5}{7} \pi)^2 : 4$$

$$= \cos.^2 \frac{1}{7} \pi + 2 \cos. \frac{1}{7} \pi \cos. \frac{5}{7} \pi + \cos.^2 \frac{5}{7} \pi : 4$$

$$2.) \cos.^2 \frac{1}{7} \pi \cos.^2 \frac{3}{7} \pi = (\cos. \frac{2}{7} \pi - \cos. \frac{3}{7} \pi)^2 : 4$$

$$= \cos.^2 \frac{2}{7} \pi - 2 \cos. \frac{2}{7} \pi \cos. \frac{3}{7} \pi + \cos.^2 \frac{3}{7} \pi : 4$$

$$3.) \cos.^2 \frac{2}{7} \pi \cos.^2 \frac{3}{7} \pi = (\cos. \frac{1}{7} \pi - \cos. \frac{2}{7} \pi)^2 : 4$$

$$= \cos.^2 \frac{1}{7} \pi - 2 \cos. \frac{1}{7} \pi \cos. \frac{2}{7} \pi + \cos.^2 \frac{2}{7} \pi : 4$$

$$\text{auch ist: } \left. \begin{aligned} 2 \cos. \frac{1}{7} \pi \cos. \frac{5}{7} \pi &= \cos. \frac{2}{7} \pi - \cos. \frac{3}{7} \pi \\ - 2 \cos. \frac{2}{7} \pi \cos. \frac{3}{7} \pi &= \cos. \frac{2}{7} \pi - \cos. \frac{1}{7} \pi \\ - 2 \cos. \frac{1}{7} \pi \cos. \frac{2}{7} \pi &= \cos. \frac{1}{7} \pi - \cos. \frac{5}{7} \pi \end{aligned} \right\} = -1.$$

$$\text{also: } \cos^2 \frac{1}{7} \pi + \cos^2 \frac{2}{7} \pi + \cos^2 \frac{3}{7} \pi + \cos^2 \frac{4}{7} \pi + \cos^2 \frac{5}{7} \pi + \cos^2 \frac{6}{7} \pi = \\ (2 \cos^2 \frac{1}{7} \pi + 2 \cos^2 \frac{2}{7} \pi + \cos^2 \frac{3}{7} \pi): 4. = 1.$$

$$= \frac{10}{4}: 4 = 1 = \frac{10}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Endlich ist: } \cos \frac{1}{7} \pi \cdot \cos \frac{2}{7} \pi \cdot \cos \frac{3}{7} \pi = \frac{(\cos \frac{1}{7} \pi + \cos \frac{3}{7} \pi) \cos \frac{3}{7} \pi}{2} \\ = \frac{\cos \frac{2}{7} \pi - \cos \frac{3}{7} \pi - \cos \frac{1}{7} \pi + 1}{4}.$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \text{ also } \cos^2 \frac{1}{7} \pi \cos^2 \frac{2}{7} \pi \cos^2 \frac{3}{7} \pi = \frac{1}{8}.$$

$$\text{also: } \sin 7z = \frac{2^7}{2} (\cos^6 z - \frac{5}{4} \cos^4 z + \frac{5}{16} \cos^2 z - \frac{1}{64}). \sin z, \\ \text{welches zu erweisen war.}$$

Anmerkung. Man sieht hieraus, warum der Coefficient des ersten Gliedes der Gleichung für $\sin n z = 2^{n-1}$ ist.

XXII. Die obigen Verhältnisse führen uns auf die Wahrnehmung, daß alle Combinationen der zweyten Potenzen der Cosinus auf bestimmte, und rationelle Gröfsen führen. Es bedeute S die Summe der Quadrate der Cosinus,

$$\text{so ist, wenn } n = 1 \text{ gesetzt wird: } S = \frac{1}{4}$$

$$n = 2 \quad \quad \quad S = \frac{3}{4}$$

$$n = 3 \quad \quad \quad S = \frac{5}{4}$$

$$n = 4 \quad \quad \quad S = \frac{7}{4}$$

$$\text{Ueberhaupt: } \cos^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cos^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \cos^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n-1}{4}.$$

Bedeutet S'' die Summe aller Produkte zu zwey und zwey, so ist

$$\text{für: } n = 2 \quad \quad \quad S'' = \frac{1}{16}$$

$$n = 3 \quad \quad \quad S'' = \frac{10}{16}$$

$$n = 4 \quad \quad \quad S'' = \frac{15}{16}$$

$$n = 5 \quad \quad \quad S'' = \frac{20}{16}.$$

Ueberhaupt:

$$\cos^2 \frac{\pi}{2n+1} \cos^2 \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos^2 \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \cos^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n-2 \cdot 2n-3}{2 \cdot 16}.$$

Bedeutet S''' die Summe der Produkte zu drey und drey; so ist

für $n = 3 \quad \text{---} \quad S''' = \frac{1}{64}.$

$n = 4 \quad \text{---} \quad S''' = \frac{19}{64}.$

$n = 5 \quad \text{---} \quad S''' = \frac{55}{64}.$

$n = 6 \quad \text{---} \quad S''' = \frac{84}{64}.$

Ueberhaupt: $\text{Cos.} \frac{\pi}{2n+1} \cdot \text{Cos.} \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \text{Cos.} \frac{3\pi}{2n+1} \dots$

$\text{Cos.} \frac{(n-2)\pi}{2n+1} \cdot \text{Cos.} \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \cdot \text{Cos.} \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n-3 \cdot 2n-4 \cdot 2n-5}{2 \cdot 3 \cdot 64}.$

somit S^{IV} = der Summe der Produkte zu vier und vier

$= \frac{2n-4 \cdot 2n-5 \cdot 2n-6 \cdot 2n-7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 128} \text{ und so weiter.}$

Anmerkung. Dafs die Combinationen der Quadrate der Sinus auch auf rationelle und bestimmte Gröfsen führen, ist aus dem vorigen einleuchtend, und wird in der Folge erwiesen werden.

XXIII. So wie wir $\text{Sin.} (2n+1)z$ in Faktoren zerlegt haben, so kann auch $\text{Sin.} 2nz$ in Faktoren zerlegt werden, deren Zahl $= 2n$ ist. Es sey $n = 4$, also $\text{Sin.} 8z$ in 8 Faktoren zu zerlegen.

Es ist: $\text{Sin.} 8z = (128 \text{ Cos.}^7 z - 192 \text{ Cos.}^5 z + 80 \text{ Cos.}^3 z - 8 \text{ Cos.} z) \cdot \text{Sin.} z.$
 $= (64 \text{ Cos.}^6 z - 96 \text{ Cos.}^4 z + 40 \text{ Cos.}^2 z - 4) \cdot 2 \text{ Sin.} z \text{ Cos.} z.$
 $= 64 (\text{Cos.}^6 z - \frac{3}{4} \text{ Cos.}^4 z + \frac{5}{8} \text{ Cos.}^2 z - \frac{1}{4}) \cdot 2 \text{ Sin.} z \text{ Cos.} z.$

Man sieht demnach bey dem ersten Blicke, dafs $\text{Sin.} z$ und $\text{Cos.} z$, oder $\text{Sin.} z$ und $\text{Sin.} (\frac{4}{3}\pi - z)$ (das Complement von $\text{Sin.} z$) Faktoren seyn müssen. Zwischen diesem sind die sechs übrigen, nämlich:

$\text{Sin.} \frac{(\pi - z)}{8}; \text{Sin.} \frac{(\pi + z)}{8}; \text{Sin.} \frac{(2\pi - z)}{8}; \text{Sin.} \frac{(2\pi + z)}{8}; \text{Sin.} \frac{(3\pi - z)}{8}; \text{Sin.} \frac{(3\pi + z)}{8}$

und man sieht, dafs der 6te Faktor das Complement des ersten, der 5te das Complement des 2ten sey.

Man multiplizire, wie vorhin, so ist:

$$\begin{aligned}\sin. \frac{\pi}{8} - z, \sin. \frac{\pi}{8} + z &= \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{\pi}{8} \\ \sin. \frac{2\pi}{8} - z, \sin. \frac{2\pi}{8} + z &= \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{2\pi}{8} \\ \sin. \frac{3\pi}{8} - z, \sin. \frac{3\pi}{8} + z &= \cos.^2 z - \cos.^2 \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

Das Produkt dieser Faktoren ist:

$$\begin{aligned}\cos.^6 z - \cos.^4 z \left(\cos.^2 \frac{\pi}{8} + \cos.^2 \frac{2\pi}{8} + \cos.^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ + \cos.^2 z \left(\cos.^2 \frac{\pi}{8} \cdot \cos.^2 \frac{2\pi}{8} + \cos.^2 \frac{\pi}{8} \cdot \cos.^2 \frac{3\pi}{8} + \cos.^2 \frac{2\pi}{8} \cdot \cos.^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ + \cos.^2 \frac{\pi}{8} \cdot \cos.^2 \frac{2\pi}{8} \cdot \cos.^2 \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

Verfährt man durchaus gerade, wie vorhin, und bemerkt man, sich die Berechnung zu erleichtern, daß $\frac{3\pi}{8}$ das Complement von $\frac{\pi}{8}$ ist, so wird der Coefficient von $\cos.^4 z = \frac{6}{4}$, der Coefficient von $\cos.^2 z = \frac{10}{16}$, und das letzte Glied $= \frac{1}{16} = \frac{4}{64}$.

Hieraus ist einleuchtend, daß, wenn das Multiplum von z eine gerade Zahl ist, die Zerlegung immer auf den Fall zurückgeführt werden könne, wo dieses Multiplum eine ungerade Zahl ist, weil $\sin. 2z$ ein nothwendiger Faktor von $\sin. 2nz$ ist.

XXIV. Wenn der Kreis in $(2n+1)$ Teile getheilt ist, so ist:

$$\begin{aligned}\cos. z + \cos. \frac{(2\pi)}{(2n+1)} + z + \cos. \frac{(2\pi)}{(2n+1)} - z + \cos. \frac{(n-1)\pi}{(2n+1)} + z + \cos. \frac{(n-1)\pi}{(2n+1)} - z \\ = \cos. \frac{(\pi)}{(2n+1)} + z + \cos. \frac{(\pi)}{(2n+1)} - z + \cos. \frac{(n\pi)}{(2n+1)} - z + \cos. \frac{(n\pi)}{(2n+1)} + z\end{aligned}$$

Beweis. Man setze $n = 3$, so ist:

S

$$\cos. z = \cos. z$$

$$\cos. \left(\frac{2\pi}{7} + z \right) = \cos. z. \cos. \frac{2\pi}{7} - \sin. z. \sin. \frac{2\pi}{7}$$

$$\cos. \left(\frac{2\pi}{7} - z \right) = \cos. z. \cos. \frac{2\pi}{7} + \sin. z. \sin. \frac{2\pi}{7}$$

$$\text{Summa} = \cos. z. \left(1 + 2 \cos. \frac{2\pi}{7} \right) = M$$

$$\cos. \left(\frac{\pi}{7} - z \right) = \cos. z. \cos. \frac{\pi}{7} + \sin. z. \sin. \frac{\pi}{7}$$

$$\cos. \left(\frac{\pi}{7} + z \right) = \cos. z. \cos. \frac{\pi}{7} - \sin. z. \sin. \frac{\pi}{7}$$

$$\cos. \left(\frac{3\pi}{7} - z \right) = \cos. z. \cos. \frac{3\pi}{7} + \sin. z. \sin. \frac{3\pi}{7}$$

$$\cos. \left(\frac{3\pi}{7} + z \right) = \cos. z. \cos. \frac{3\pi}{7} - \sin. z. \sin. \frac{3\pi}{7}$$

$$= \text{Summa} = \cos. z \left(2 \cos. \frac{\pi}{7} + 2 \cos. \frac{3\pi}{7} \right) = N$$

$$\text{Und da: } 1 + 2 \cos. \frac{2\pi}{7} = 2 \cos. \frac{\pi}{7} + 2 \cos. \frac{3\pi}{7}; \text{ so ist } M = N$$

XXV. Wenn alles bleibt, wie zuvor, so ist:

$$2 \cos. (2n+1). z = 2 \cos. z. 2 \cos. \left(\frac{\pi}{2n+1} + z \right). 2 \cos. \left(\frac{\pi}{2n+1} - z \right) \dots$$

$$\times 2 \cos. \left(\frac{n\pi}{2n+1} + z \right). 2 \cos. \left(\frac{n\pi}{2n+1} - z \right).$$

Beweis. Man multiplizire die Faktoren Nro. XXIV., so hat man:

$$\cos. \left(\frac{\pi}{7} - z \right). \cos. \left(\frac{\pi}{7} + z \right) = \cos.^2 z - \sin.^2 \frac{\pi}{7}$$

$$\cos. \left(\frac{2\pi}{7} - z \right). \cos. \left(\frac{2\pi}{7} + z \right) = \cos.^2 z - \sin.^2 \frac{2\pi}{7}$$

$$\cos. \left(\frac{3\pi}{7} - z \right). \cos. \left(\frac{3\pi}{7} + z \right) = \cos.^2 z - \sin.^2 \frac{3\pi}{7}$$

Das Produkt dieser drey Faktoren ist:

$$\begin{aligned} & \cos^6 z - \cos^4 z \left(\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} \right) \\ & + \cos^2 z \left(\sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} \right) \\ & - \sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} \end{aligned}$$

Da nun $\cos 7z = 2^{7-1} (\cos^6 z - \frac{7}{4} \cos^4 z + \frac{14}{16} \cos^2 z - \frac{7}{64}) \cos z$ ist, so müssen die Coefficienten gleich seyn.

Nun ist $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} = 1 - \cos^2 \frac{2\pi}{7} + 1 - \cos^2 \frac{2\pi}{7} + 1 - \cos^2 \frac{3\pi}{7}$
 $+ 1 - \cos^2 \frac{3\pi}{7}$, und da $\cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{5}{4}$ ist, so ist
 der Coefficient von $\cos^4 z = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$.

Eben so findet man den Coefficienten von $\cos^2 z = \frac{14}{16}$, und für das letzte Glied $= \frac{7}{64}$.

Bey fortgesetzter Prüfung erkennt man, es sey die Summe der Quadrate aller Sinuse von $\sin \frac{\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n+1}{4}$; die Summe

der Producte dieser Quadrate zu zwey und zwey $= \frac{2n+1 \cdot 2n-2}{2 \cdot 16}$

die Summe ihrer Produkte zu drey und drey $= \frac{2n+1 \cdot 2n-3 \cdot 2n-4}{2 \cdot 3 \cdot 64}$

und so weiter.

Anmerkung. Die Faktoren von $\cos 2nz$ wird der Leser auf diese Art ohne ferneren Unterrichte finden können, und er wird durch Vergleichung erkennen, daß unsere Coefficienten figurirte Zahlen seyen, wie schon gezeigt wurde. Wir sind durch den neuen Lehrsatz um einen Schritt weiter gekommen, aber erschöpft ist dieser Gegenstand noch lange nicht.

XXVI. Wenn die halbe Periferie des Kreises in $(2n+1)$ Theile getheilt ist, so ist:

$$\begin{aligned} (2n+1) \cdot \text{Tang. } (2n+1) z &= \text{Tang. } z - \text{Tang. } \left(\frac{\pi}{2n+1} - z \right) + \text{Tang. } \left(\frac{\pi}{2n+1} + z \right) \\ &\quad - \text{Tang. } \left(\frac{2\pi}{2n+1} - z \right) + \text{Tang. } \left(\frac{2\pi}{2n+1} + z \right) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad - \text{Tang. } \left(\frac{n\pi}{2n+1} - z \right) + \text{Tang. } \left(\frac{n\pi}{2n+1} + z \right). \end{aligned}$$

Das Produkt aller dieser Größen $= \text{Tang. } (2n+1) z$.

Beweis. Es sey $n = 2$.

$$\text{Tang. } \left(\frac{1}{3}\pi - z \right) = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{3}\pi \text{ Cos. } z - \text{Cos. } \frac{1}{3}\pi \text{ Sin. } z}{\text{Cos. } \frac{1}{3}\pi \text{ Cos. } z + \text{Sin. } \frac{1}{3}\pi \text{ Sin. } z}$$

$$\text{Tang. } \left(\frac{1}{3}\pi + z \right) = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{3}\pi \text{ Cos. } z + \text{Cos. } \frac{1}{3}\pi \text{ Sin. } z}{\text{Cos. } \frac{1}{3}\pi \text{ Cos. } z - \text{Sin. } \frac{1}{3}\pi \text{ Sin. } z}.$$

Diese Fraktionen bringe man auf gleiche Benennung, subtrahire die erste von der zweyten, und reduziere, so hat man:

$$\text{Tang. } \left(\frac{1}{3}\pi + z \right) - \text{Tang. } \left(\frac{1}{3}\pi - z \right) = \frac{2 \text{ Sin. } z \text{ Cos. } z}{\text{Cos.}^2 z - \text{Sin.}^2 \frac{1}{3}\pi}.$$

$$\text{Eben so hat man: } \text{Tang. } \left(\frac{2}{3}\pi + z \right) - \text{Tang. } \left(\frac{2}{3}\pi - z \right) = \frac{2 \text{ Sin. } z \text{ Cos. } z}{\text{Cos.}^2 z - \text{Sin.}^2 \frac{2}{3}\pi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Diese Fraktionen bringe man auf gleiche Benennung, und addire, so} \\ \text{hat man: Summa} &= \frac{2 \text{ Sin. } z \text{ Cos. } z \cdot (2 \text{ Cos.}^2 z - (\text{Sin.}^2 \frac{1}{3}\pi + \text{Sin.}^2 \frac{2}{3}\pi))}{\text{Cos.}^4 z - \text{Cos.}^2 z (\text{Sin.}^2 \frac{1}{3}\pi + \text{Sin.}^2 \frac{2}{3}\pi) + \text{Sin.}^2 \frac{1}{3}\pi \cdot \text{Sin.}^2 \frac{2}{3}\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } \text{Sin.}^2 \frac{1}{3}\pi + \text{Sin.}^2 \frac{2}{3}\pi &= \frac{5}{4} \text{ und } \text{Sin.}^2 \frac{1}{3}\pi \cdot \text{Sin.}^2 \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{16} \text{ substituire} \\ \text{man ihren Werth, so hat man: Summa} &= \frac{4 (16 \text{ Cos.}^5 z - 10 \text{ Cos. } z) \text{ Sin. } z}{16 \text{ Cos.}^4 z - 20 \text{ Cos.}^2 z + 5}. \end{aligned}$$

$$\text{dazu addire man: } \text{Tang. } z = \frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}, \text{ so wird:}$$

$$\begin{aligned} \text{Summa} &= \frac{80 \text{ Cos.}^4 z - 60 \text{ Cos.}^2 z + 5}{16 \text{ Cos.}^5 z - 20 \text{ Cos.}^3 z + 5} \frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z} = \frac{5(16 \text{ Cos.}^4 z - 12 \text{ Cos.}^2 z + 1) \text{ Sin. } z}{16 \text{ Cos.}^5 z - 20 \text{ Cos.}^3 z + 5 \text{ Cos. } z} \\ &= 5 \text{ Tang. } 5 z, \end{aligned}$$

Somit ist der erste Theil dieses Lehrsatzes erwiesen.

$$\begin{aligned} \text{Man multipliziere: } \text{Tang.}(\tfrac{1}{3}\pi - z). \text{Tang.}(\tfrac{1}{3}\pi + z) &= \frac{\text{Cos.}^2 z - \text{Cos.}^2 \tfrac{1}{3}\pi}{\text{Cos.}^2 z - \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{3}\pi} \\ \text{Tang.}(\tfrac{2}{3}\pi - z). \text{Tang.}(\tfrac{2}{3}\pi + z) &= \frac{\text{Cos.}^2 z - \text{Sin.}^2 \tfrac{2}{3}\pi}{\text{Cos.}^2 z - \text{Sin.}^2 \tfrac{2}{3}\pi} \end{aligned}$$

Diese Fraktionen mit einander und mit $\text{Tang. } z$ multipliziert, geben:

$$\begin{aligned} &(\text{Cos.}^4 z - \text{Cos.}^2 z (\text{Cos.}^2 \tfrac{1}{3}\pi + \text{Cos.}^2 \tfrac{2}{3}\pi) + (\text{Cos.}^2 \tfrac{1}{3}\pi \cdot \text{Cos.}^2 \tfrac{2}{3}\pi) \text{Sin. } z. \\ &(\text{Cos.}^4 z - \text{Cos.}^2 z (\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{3}\pi + \text{Sin.}^2 \tfrac{2}{3}\pi) + (\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{3}\pi \cdot \text{Sin.}^2 \tfrac{2}{3}\pi) \text{Cos. } z. \end{aligned}$$

Substituirt man im Zähler und im Nenner die aus dem vorigen Artikel bekannten Werthe der Combinationen der Quadrate der Cosinus und Sinus, so wird:

$$\begin{aligned} (\text{Cos.}^4 z - \tfrac{3}{4} \text{Cos.}^2 z + \tfrac{1}{16}) \text{Sin. } z &= (16 \text{Cos.}^4 z - 12 \text{Cos.}^2 z + 1) \text{Sin. } z = \text{Tang. } 5 z. \\ (\text{Cos.}^4 z - \tfrac{5}{4} \text{Cos.}^2 z + \tfrac{5}{16}) \text{Cos. } z &= (16 \text{Cos.}^4 z - 20 \text{Cos.}^2 z + 5) \text{Cos. } z \end{aligned}$$

Wäre $n = 3$, also $(2n+1) = 7$, so fände man:

$$\begin{aligned} &(\text{Cos.}^6 z - \text{Cos.}^4 z (\text{Cos.}^2 \tfrac{1}{7}\pi + \text{Cos.}^2 \tfrac{2}{7}\pi + \text{Cos.}^2 \tfrac{3}{7}\pi) + \text{Cos.}^2 z (\text{Cos.}^2 \tfrac{1}{7}\pi \cdot \text{Cos.}^2 \tfrac{2}{7}\pi + \\ &(\text{Cos.}^2 \tfrac{1}{7}\pi \cdot \text{Cos.}^2 \tfrac{3}{7}\pi) - (\text{Cos.}^2 \tfrac{1}{7}\pi \dots \text{Cos.}^2 \tfrac{3}{7}\pi) \text{Sin. } z. \\ &\dots + \text{Sin.}^2 \tfrac{2}{7}\pi \cdot \text{Sin.}^2 \tfrac{3}{7}\pi) - \text{Sin.}^2 \tfrac{1}{7}\pi \dots \text{Sin.}^2 \tfrac{3}{7}\pi) \text{Cos. } z. \\ &= (\text{Cos.}^6 z - \tfrac{5}{4} \text{Cos.}^4 z + \tfrac{6}{16} \text{Cos.}^2 z - \tfrac{1}{64}) \text{Sin. } z \\ &(\text{Cos.}^6 z - \tfrac{7}{4} \text{Cos.}^4 z + \tfrac{14}{16} \text{Cos.}^2 z - \tfrac{7}{64}) \text{Cos. } z \\ &= (64 \text{Cos.}^6 z - 80 \text{Cos.}^4 z + 24 \text{Cos.}^2 z - 1) \text{Sin. } z = \text{Tang. } 7 z. \\ &(64 \text{Cos.}^6 z - 112 \text{Cos.}^4 z + 56 \text{Cos.}^2 z - 7) \text{Cos. } z. \end{aligned}$$

XXVII. Der Cotesische Lehrsatz gehöret zu jenen, die seit Jahren durch ein glückliches Tatoniren gefunden worden sind, aber nicht erwiesen werden konnten. Eulers Beweis durch $\sqrt{-1}$ kann für keinen gelten; l'Huillier versichert, er habe einen ganz befriedigenden gefunden, theilt ihn aber nicht mit. Nur der neue Lehrsatz giebt den Schlüssel zur Entwicklung des Cotesischen.

XXVIII. Dieser Lehrsatz kann als Problem folgendermassen vorge-
tragen werden. Man soll die Gröfse $a^n + b^n$ in trinomische rationale
Faktoren auflösen.

T

Auflösung. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist $a^n \mp b^n$ durch $a \mp b$ theilbar, also $a \mp b$ ein Faktor. Ist n eine gerade Zahl, so ist $a^n \mp b^n$ durch $a^2 \mp b^2$ theilbar.

Die übrigen Faktoren müssen die folgende Form haben: $a^2 - 2abx + b^2$. Es sey $a^{2n+1} \mp b^{2n+1}$ in Faktoren aufzulösen; so ist $a \mp b$ ein Faktor; die übrigen seyen, wenn $n = 3$ gesetzt wird: $a^2 - 2abx + b^2$, $a^2 - 2aby + b^2$, $a^2 - 2abz + b^2$; und es ist einleuchtend, daß x, y, z Fraktionen seyn müssen. Man verrichte die Multiplikation; diese wird sehr beschwerlich, wenn man den Vortheil nicht kennt, welcher gezeigt werden wird. Man hat:

$$\left. \begin{array}{l} a^7 \mp b^7 = a^6 - 2a^5b \\ a \mp b \quad \quad \quad 4a^3b^3 \\ \quad \quad \quad 2ab^5 \end{array} \right\} x+y+z \quad \left. \begin{array}{l} + 4a^4b^2 \\ 4a^2b^4 \end{array} \right\} xy+xz+yz - 8a^3b^3.x.y.z.$$

$$+ 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6.$$

Man streiche die gleichen Gröſſen zu beyden Seiten aus, und reduziere, so müssen die übrigbleibenden Glieder sich aufheben, und x, y, z so bestimmt werden, daß diese Aufhebung erfolge.

$$\begin{aligned} \text{Es muß demnach } &-(2a^5b + 2ab^5).(x+y+z) = -(a^5b + ab^5) \text{ seyn. Nr.1} \\ &-(4a^3b^3).(x+y+z) - 8a^3b^3.x.y.z = -a^3b^3 \text{ Nr.2} \\ &+(4a^4b^2 + 4a^2b^4).(xy+xz+yz) = -(2a^4b^2 + 2a^2b^4). \text{ Nr.3} \end{aligned}$$

Diesemnach muß $(x+y+z) = \frac{1}{2}$ seyn. Nun ist: $\text{Cos. } \frac{1}{7}\pi + \text{Cos. } \frac{3}{7}\pi + \text{Cos. } \frac{5}{7}\pi = \frac{1}{2}$. Man setze also: $x = \text{Cos. } \frac{1}{7}\pi$, $y = \text{Cos. } \frac{3}{7}\pi$, $z = \text{Cos. } \frac{5}{7}\pi$, so heben sich die Glieder Nr. 1 auf.

Berechnet man das Produkt von $\text{Cos. } \frac{1}{7}\pi. \text{Cos. } \frac{3}{7}\pi. \text{Cos. } \frac{5}{7}\pi = -\frac{1}{8}$ und substituirt, so heben sich auch die Glieder. Nr. 2 auf.

Endlich ist $\text{Cos. } \frac{1}{7}\pi. \text{Cos. } \frac{3}{7}\pi + \text{Cos. } \frac{1}{7}\pi \text{Cos. } \frac{5}{7}\pi + \text{Cos. } \frac{3}{7}\pi. \text{Cos. } \frac{5}{7}\pi = -\frac{1}{2}$ also heben sich auch die Glieder Nr. 3 auf. Es ist also:

$$a^7 \mp b^7 = (a \mp b). (a^2 - 2ab \text{Cos. } \frac{1}{7}\pi + b^2). (a^2 - 2ab \text{Cos. } \frac{3}{7}\pi + b^2). (a^2 - 2ab \text{Cos. } \frac{5}{7}\pi + b^2).$$

XXIX. Aus dem Gesagten erkennt man leicht, wie die Faktoren von $a^6 + b^6$ zu finden seyen. Es ist nämlich:

$$a^6 + b^6 = (a^2 - 2abx + b^2) \cdot (a^2 - 2aby + b^2) \cdot (a^2 - 2abz + b^2).$$

Multipliziert man, so ist:

$$a^6 + b^6 = a^6 - 2a^5b \left\{ \begin{array}{l} 4a^3b^3 \\ 2ab^5 \end{array} \right\} x + y + z + 4a^4b^2 \left\{ \begin{array}{l} 4a^2b^4 \\ 2ab^5 \end{array} \right\} xy + xz + yz - 8a^3b^3 \cdot x \cdot y \cdot z + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6.$$

Man reduziere, und setze $x = \cos \frac{1}{6}\pi$, $y = \cos \frac{5}{6}\pi$; $z = \cos \frac{5}{6}\pi$; so ist $(x + y + z) = 0$. den $\cos \frac{5}{6}\pi = 0$; $\cos \frac{1}{6}\pi + \cos \frac{5}{6}\pi = 0$. Es ist also auch $x \cdot y \cdot z = 0$.

Ferner ist: $xy + yz = 0$, wegen $y = 0$, aber $xz = \cos \frac{1}{6}\pi \cdot \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{4}$.

Es heben sich also alle Glieder auf, somit ist:

$$a^6 + b^6 = (a^2 - 2ab \cos \frac{1}{6}\pi + b^2) \cdot (a^2 - 2ab \cos \frac{5}{6}\pi + b^2) \cdot (a^2 - 2ab \cos \frac{5}{6}\pi + b^2)$$

und hieraus erkennt man, daß $(a^2 + b^2)$ ein Faktor sey, weil $\cos \frac{5}{6}\pi = \cos 90^\circ = 0$ ist.

XXX. Im Allgemeinen kann der Cotesische Lehrsatz folgendermaßen vorgestellt werden:

$$\begin{array}{ll} 1.) a^{2n} + b^{2n} = (a^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{2n} + b^2) & 2.) a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a + b) \\ & \times (a^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{2n+1} + b^2) \\ & \times (a^2 - 2ab \cos \frac{3\pi}{2n} + b^2) \\ & \times \dots \dots \dots \\ & \times (a^2 - 2ab \cos \frac{2n-3}{2n} \pi + b^2) \\ & \times (a^2 - 2ab \cos \frac{2n-1}{2n} \pi + b^2) \\ 3.) a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2) & 4.) a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a - b) \\ & \times (a^2 - 2ab \cos \frac{2\pi}{2n} + b^2) \\ & \times \dots \dots \dots \\ & \times (a^2 - 2ab \cos \frac{2n-2}{2n} \pi + b^2) \\ & \times (a^2 - 2ab \cos \frac{2n}{2n+1} \pi + b^2). \end{array}$$

Man sieht hieraus, in welcher genauen Verbindung der Cotesische Lehrsatz mit der Zerlegung der Cosinus und Sinus in Faktoren stehe, und daß dieser nur durch jene bewiesen werden könne.

XXXI. Man setze in Nro. 1. $a = b = 1$; $p = \frac{1}{2} \pi$, so wird:

$$1 + 1 = 2 = 4 \sin.^2 \frac{p}{2n} \cdot 4 \sin.^2 \frac{3p}{2n} \cdot 4 \sin.^2 \frac{5p}{2n} \dots \times 4 \sin.^2 \frac{(2n-1)p}{2n}$$

$$\sqrt{2} = 2^n \sin. \frac{p}{2n} \cdot \sin. \frac{3p}{2n} \dots \times \sin. \frac{2n-1}{2n} p$$

Es sey $n=5$; $\sqrt{2} = 2^5 \cdot \sin. 9^\circ \cdot \sin. 27^\circ \cdot \sin. 45^\circ \cdot \sin. 63^\circ \cdot \sin. 81^\circ$.

Man verfare ebenso mit Nro. 2., so hat man:

$$1 = 4 \sin.^2 \frac{p}{2n+1} \cdot 4 \sin.^2 \frac{3p}{2n+1} \cdot 4 \sin.^2 \frac{5p}{2n+1} \dots \times 4 \sin.^2 \frac{2n-1}{2n+1} p$$

$$= 2^n \sin. \frac{p}{2n+1} \cdot \sin. \frac{3p}{2n+1} \cdot \sin. \frac{5p}{2n+1} \dots \times \sin. \frac{2n-1}{2n+1} p$$

Es sey $n=7$; $1 = 2^7 \cdot \sin. 6^\circ \cdot \sin. 18^\circ \cdot \sin. 30^\circ \cdot \sin. 42^\circ \cdot \sin. 54^\circ \cdot \sin. 66^\circ \cdot \sin. 78^\circ$.

In Nr. 3. dividire man $a^{2n} - b^{2n}$ durch $a^2 - b^2$, so ist:

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^2 - b^2} = a^{2n-2} + a^{2n-4} \cdot b^2 + a^{2n-6} b^4 \dots + b^{2n-2}$$

Setzt man auch hier $a = b = 1$, $p = \frac{1}{2} \pi$, so hat man

$$n = 4^{n-1} \cdot \sin.^2 \frac{p}{n} \cdot \sin.^2 \frac{2p}{n} \cdot \sin.^2 \frac{3p}{n} \dots \times \sin.^2 \frac{n-1}{n} p$$

Aus Nro. 4 erhält man:

$$2n+1 = 4^n \cdot \sin.^2 \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin.^2 \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \sin.^2 \frac{3\pi}{2n+1} \dots \sin.^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

XXXII. Nach Cotes haben einige Mathematiker seinen Lehrsatz erweitert, und gefunden, daß auch $a^{2n} - 2a^n b^n \cos. A + b^{2n}$ in trinomische Faktoren zerlegt werden könne, deren Zahl n ist.

Es sey $n=3$, so ist die zu zerlegende Gröfse $a^6 - 2a^3 b^3 \cos. A + b^6$, und die drey Faktoren sind $(a^2 - 2abx + b^2)$; $(a^2 - 2aby + b^2)$; $(a^2 - 2abz + b^2)$, durch deren Multiplikation die gegebene Gröfse entstehen soll. Die Multiplikation giebt:

$$\begin{array}{r} a^6 - 2a^5 b \\ 3a^4 b^2 - 4a^3 b^3 \\ 3a^2 b^4 - 2ab^5 \\ b^6 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{array} \right. + \begin{array}{l} 4a^3 b^2 \\ 4a^2 b^3 \\ 8a^3 b^3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} xy + xz + yz \\ xy + xz + yz \\ xy + xz + yz \end{array} \right. - 8a^3 b^3 xyz$$

$$= a^6 - 2a^3 b^3 \cos. A + b^6$$

Sollen sich nun alle Glieder zu beyden Seiten der Gleichungs-Zeichen aufheben, so muß $x + y + z = 0$; $xyz = \frac{1}{4} \cos. A$, $xy + xz + yz = -\frac{3}{4}$ seyn. Es muß also $\cos. A$ in drey Faktoren zerlegt werden, deren Summe $= 0$ ist. Diese sind nun, wie wir wissen: $\cos. \frac{1}{3} A$; $\cos. \frac{2\pi - A}{3}$;

$$\cos. \frac{2\pi + A}{3}; \text{ also } x = \cos. \frac{1}{3} A; y = \cos. \frac{2\pi - A}{3}; z = \cos. \frac{2\pi + A}{3}.$$

Das Produkt dieser drey Faktoren ist $= \frac{1}{4} \cos. A$. Nun ist:

$$xy = \cos. \frac{1}{3} A. \cos. \frac{2\pi - A}{3} = (\cos. \frac{2}{3} \pi + \cos. \frac{2}{3} (\pi - A)) : 2.$$

$$xz = \cos. \frac{1}{3} A. \cos. \frac{2\pi + A}{3} = (\cos. \frac{2}{3} (\pi + A) + \cos. \frac{2}{3} \pi) : 2.$$

$$yz = \cos. \frac{2\pi - A}{3}. \cos. \frac{2\pi + A}{3} = (\cos. \frac{4}{3} \pi + \cos. \frac{2}{3} A) : 2.$$

Da nun $\cos. \frac{1}{3} A + \cos. \frac{2}{3} (\pi - A) + \cos. \frac{2}{3} (\pi + A) = 0$ ist, und $\cos. \frac{2}{3} \pi + \cos. \frac{2}{3} \pi + \cos. \frac{4}{3} \pi = -\frac{3}{2}$, so ist $xy + xz + yz = -\frac{3}{4}$. Es heben sich also alle Glieder auf, und es ist:

$$a^6 - 2a^3b^3 \cos. A + b^6 = (a^2 - 2ab \cos. \frac{1}{3} A + b^2). (a^2 - 2ab \cos. \frac{2\pi - A}{3} + b^2). \\ \times (a^2 - 2ab \cos. \frac{2\pi + A}{3} + b^2)$$

Man setze $A = 30^\circ$, und $a = b = 1$. so muß, nach gehöriger Reduktion:

$$\sin. 15^\circ = 4. \sin. 5^\circ. \cos. 25^\circ. \cos. 35^\circ. \text{ seyn.}$$

$$\text{Nun ist: } \log. 4 = 0. 6020600.$$

$$\log. \sin. 5^\circ = 8. 9402960.$$

$$\log. \cos. 25^\circ = 9. 9572757.$$

$$\log. \cos. 35^\circ = 9. 9133645.$$

$$\log. \sin. 15^\circ = 9. 4129962.$$

XXXIII. Es sey $a^{10} - 2a^5b^5. \cos. A + b^{10}$ in fünf Faktoren zu zerlegen. Man setze $(x + y + u + v + z) = \text{Summa der Faktoren von } \cos. A = m.$

U

Es sey n die Summe ihrer Produkte zu zwey und zwey.

p die Summe ihrer Produkte zu drey und drey.

q die Summe ihrer Produkte zu vier und vier.

Die Multiplikation giebt:

$$\begin{array}{rcll} a^{10} & - 2a^9b & + 4a^8b^2 & - 8a^7b^3 & + 16a^6b^4 \\ 5a^8b^2 & 8a^7b^3 & 12a^6b^4 & 10a^5b^5 & 16a^4b^6 \\ 10a^6b^4 & 12a^5b^5 & 12a^4b^6 & 8a^3b^7 & \\ 10a^4b^6 & 8a^3b^7 & 4a^2b^8 & & \\ 5a^2b^8 & 2ab^9 & & & \\ b^{10} & & & & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} m \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} n \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} p \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} q$$

$$- 32 a^5 b^5 \cdot x y u v z = a^{10} - 2 a^5 b^5 \cos. A + b^{10}$$

Vergleicht man die Glieder, so sieht man, daß $m = 0$, und $p = 0$ seyn müsse. Setzt man nun $x = \cos. \frac{1}{5} A$; $y = \cos. \frac{2\pi - A}{5}$
 $u = \cos. \frac{2\pi + A}{5}$; $v = \cos. \frac{4\pi - A}{5}$; $z = \cos. \frac{4\pi + A}{5}$, dann ist:
 $m = 0$, und $x y u v z = \frac{1}{16}$.

Es muß ferner $n = -\frac{5}{4}$ und $q = \frac{5}{16}$ seyn,

Man berechne die Summe der Produkte dieser Faktoren zu zwey und zwey; so findet man $n = -\frac{5}{4}$.

Eben so findet man das Produkt zu vier und vier $= q = \frac{5}{16}$ und das Produkt zu drey und drey $= p = 0$.

Diese Fraktionen sind die Coeffizienten von $\cos. 5z$; denn es ist:

$$\cos. 5z = 2^4 (\cos.^4 z - \frac{5}{4} \cos.^2 z + \frac{5}{16}) \cos. z.$$

Wir erkennen also, warum in den Gleichungen für $\sin. n z$, $\cos. n z$ die ungeraden Glieder verschwinden; es ist nämlich ihr Coeffizient $= 0$. Allein die mühesame und langweilige Rechnung, mittels welcher man zu diesen Resultaten gelangt, beweiset zwar, daß es so in jedem einzelnen Falle sey; aber man wünscht sich zu überzeugen, daß es so seyn müsse, und eine leichtere Berechnung zu finden. Hier gehet also noch ein Zwischen - Lehrsatz ab, der diese Verhältnisse in eine leicht zu übersehende und zu verfolgende Verbindung setze.

XXXIV. Nicht minder beschwerlich und langweilich dürfte den mehresten Lesern die Multiplikation der Faktoren scheinen, wenn sie nicht eingeübet sind; diesemnach wird es dienlich seyn, eine Muster-Rechnung vorzulegen, vermög welcher man sich in jedem Falle leicht zurecht finden wird.

Es seyen 7 trinomische Faktoren von der Form $(a - 2ab \cos. A + b^2)$ zu multiplizieren.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a^{14} & - & 2ab \cdot a^{12} & \left. \begin{array}{l} + 4a^2b^2 \cdot a^{10} \\ 5a^3b^2 \\ 10a^6b^4 \\ 10a^4b^6 \\ 5a^2b^8 \\ b^{10} \end{array} \right\} n & - & 8a^3b^3 \cdot a^8 & \left. \begin{array}{l} + 16a^4b^4 \cdot a^6 \\ 3a^4b^2 \\ 3a^2b^4 \\ b^6 \end{array} \right\} q \\
 7a^{12}b^2 & & 6a^{10}b^2 & & & 4a^6b^2 & \\
 21a^{10}b^4 & & 15a^8b^4 & & & 6a^4b^4 & \\
 35a^8b^6 & & 20a^6b^6 & & & 4a^2b^6 & \\
 35a^6b^8 & & 15a^4b^8 & & & b^8 & \\
 21a^4b^{10} & & 6a^2b^{10} & & & & \\
 7a^2b^{12} & & b^{12} & & & & \\
 b^{14} & & & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 - 32a^5b^5 \cdot a^4 & \left. \begin{array}{l} + 64a^6b^6 \cdot a^2 \\ 2a^2b^2 \\ b^2 \end{array} \right\} r & - 128a^7b^7 \cdot u = a^{14} - 2a^7b^7 \cos. A + b^{14}. \\
 & &
 \end{array}$$

Diesemnach muß $m = p = r = 0$; $n = \frac{7}{4}$; $q = -\frac{7}{8}$; $s = \frac{7}{84}$ seyn.

Diese Fraktionen sind die Coeffizienten der Potenzen, der Cosinus in der Gleichung für $\cos. 7z = 2^6 (\cos.^6 z - \frac{7}{4} \cos.^4 z + \frac{14}{16} \cos.^2 z - \frac{7}{64}) \cos. z$. Allein durch Rechnung zu finden, daß die Summe der Produkte der 7 Faktoren zu vier und vier $= -\frac{14}{16}$ sey, ist eine verdrüssliche Arbeit.

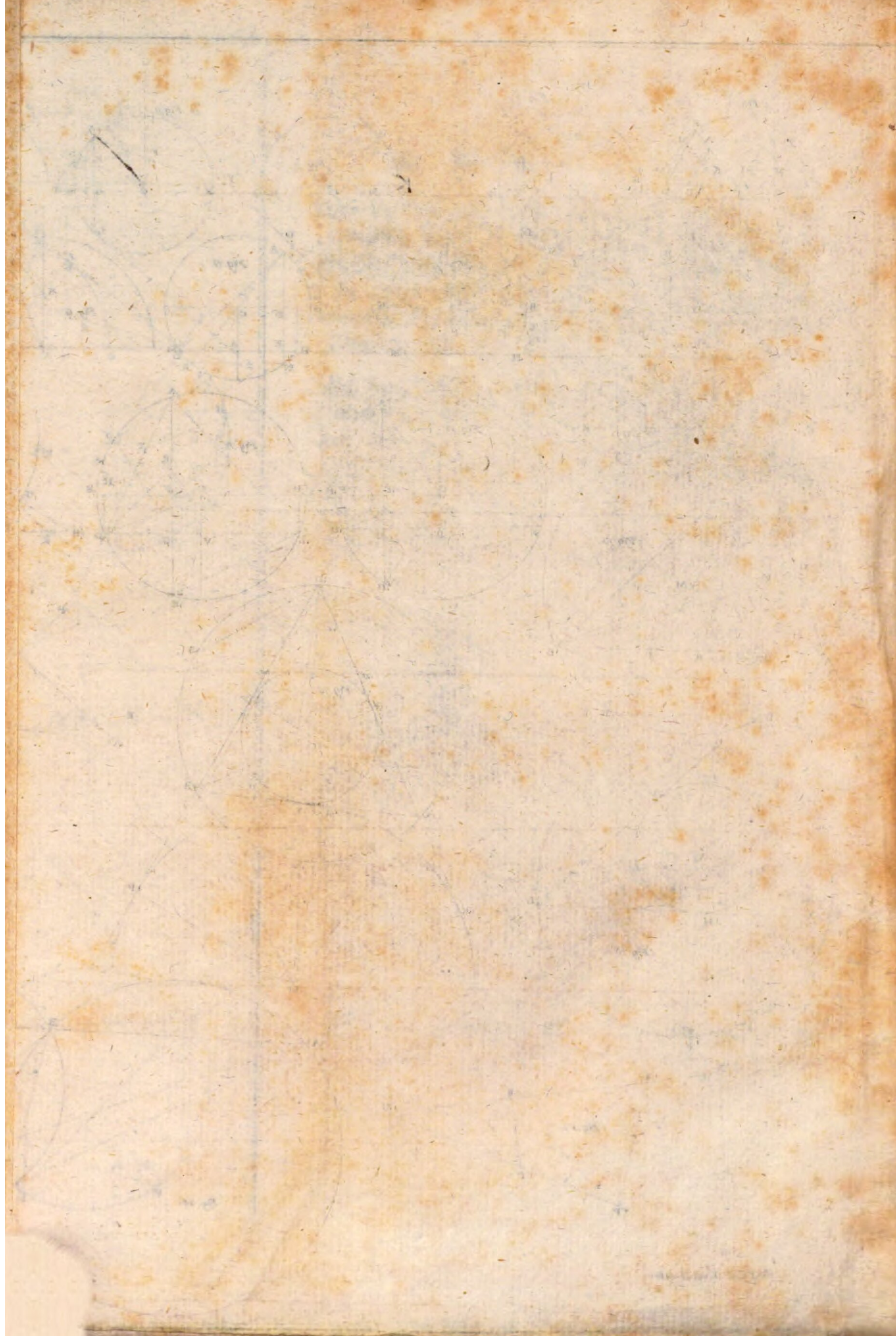
In der ersten Colonne hat man somit die n te Potenz von $a^2 + b^2$; in der 2ten hat man die $(n-1)$ te Potenz von $(a^2 + b^2)$ multipliziert mit $2ab$, und die Summe der 7 Faktoren von $\cos. A$, die $= 0$ ist. In der dritten hat man die $(n-2)$ te Potenz von $(a^2 + b^2)$ multipliziert mit $4a^2b^2$, und der Summe der Produkten der 7 Faktoren von $\cos. A$ zu zwey und zwey. In der 4ten hat man die $(n-3)$ te Potenz von $(a^2 + b^2)$ multipliziert mit $8a^3b^3$, und der Summe der Produkte der 7 Faktoren zu drey und drey, und so weiter.

Die geraden Columnen sind immer $= 0$. Also muß nicht nur die Summe der Faktoren, sondern auch die Summe der Produkte der Faktoren zu drey und drey, fünf und fünf etc. $= 0$ seyn. Dagegen sind die Summen der Produkte zu zwey und zwey, vier und vier, sechs und sechs etc. bestimmte rationelle Gröſſen: und die Coeffizienten der Potenzen von $\text{Cos. } z$ in der Gleichung für $\text{Cos. } (2n+1) z$.

Dafs es so sey, findet man durch eine leichte, aber äufserst langweilige und ermüdende Rechnung; diese zu erleichtern, und im Allgemeinen den Beweis zu finden, dafs $m, p, r = 0, n, q, s$ bestimmte rationelle Gröſſen seyen, ist eine der Bemühungen der Geometer nicht unwürdige Aufgabe, und dürfte aus der Summirung der Faktoren abzuleiten seyn, nach Eulers Formel im 12ten Kapitel seiner Einleitung zum Differential- und Integral - Kalkul.







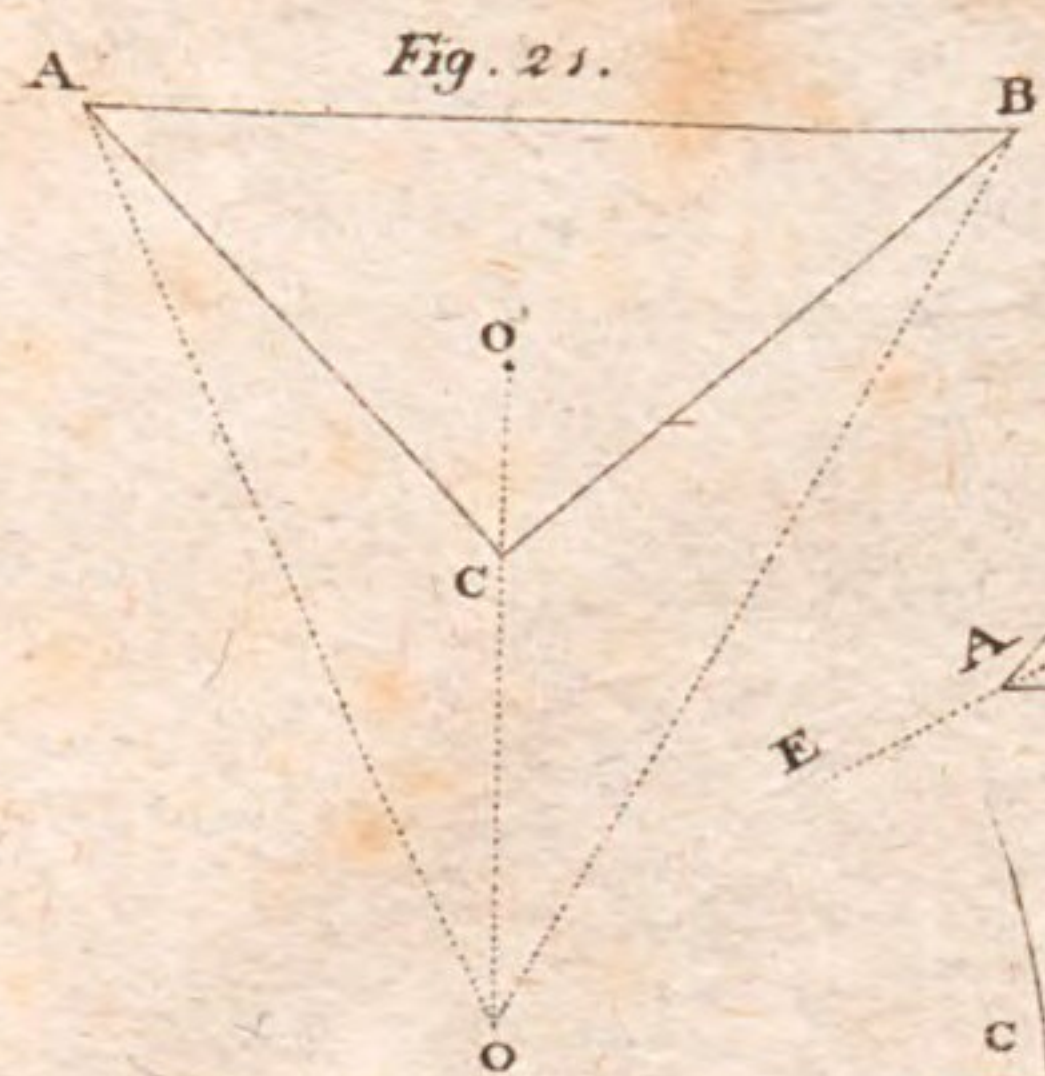


Fig. 21.

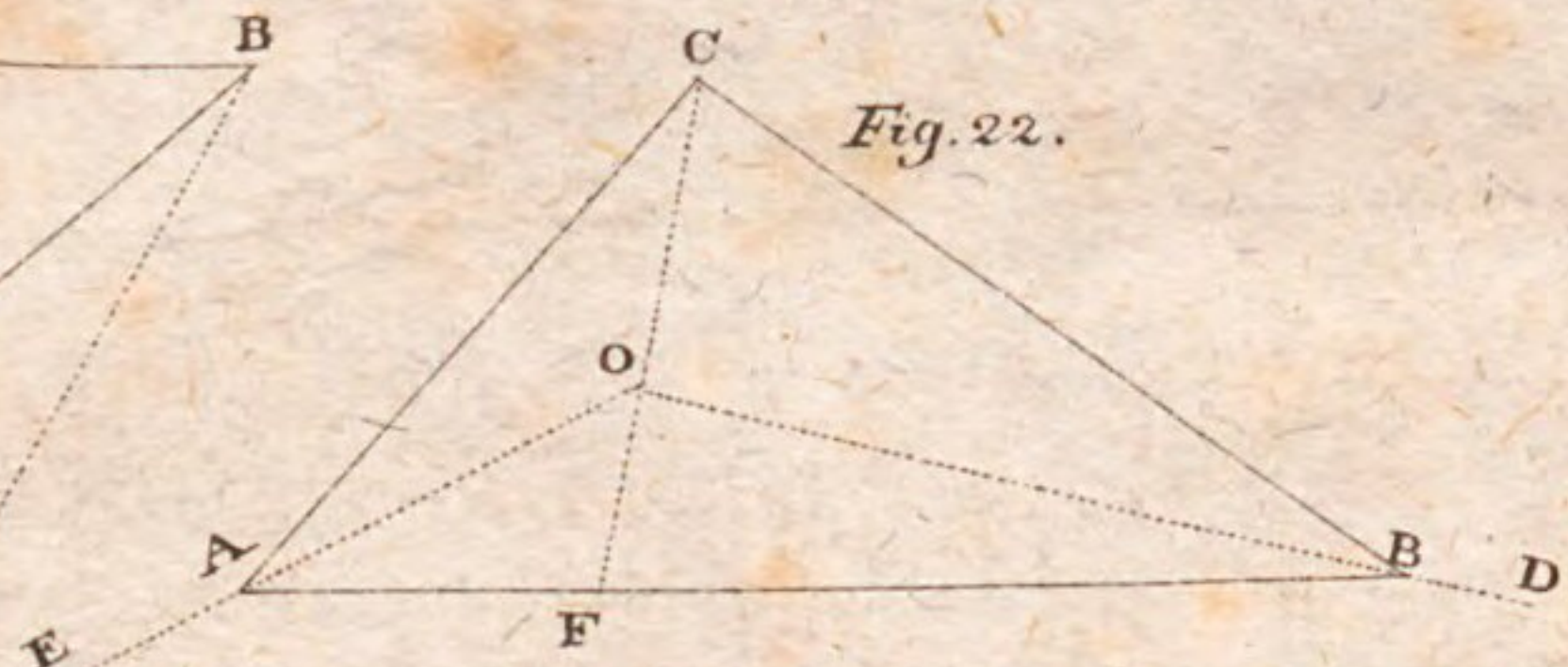


Fig. 22.

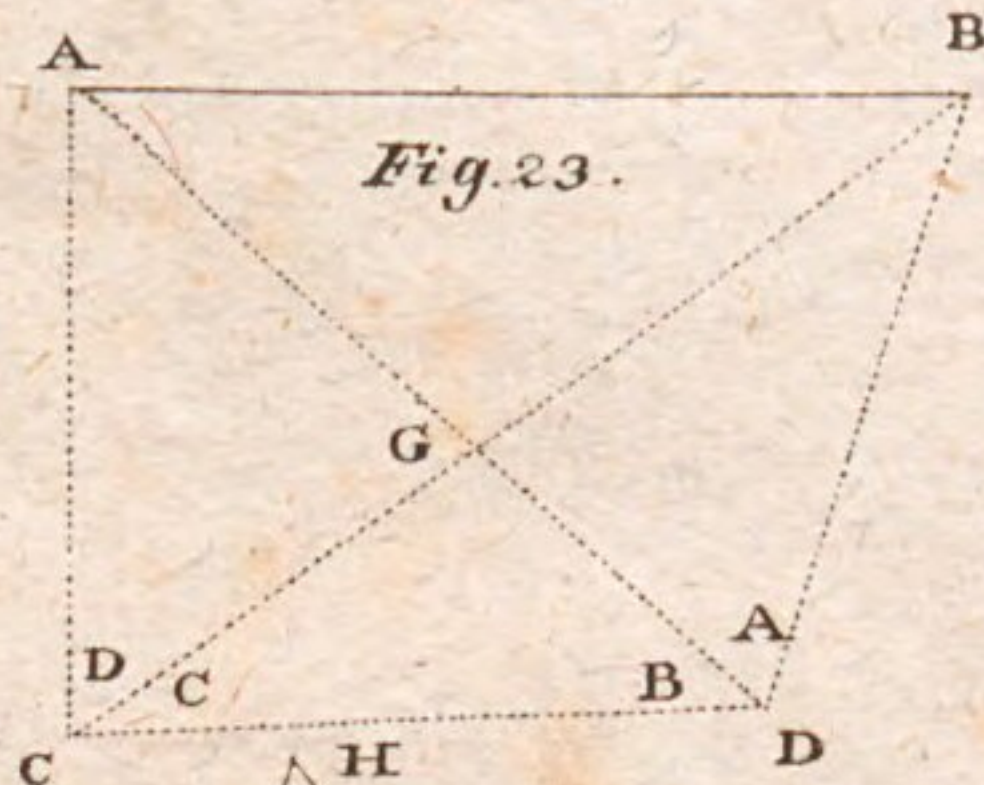


Fig. 23.

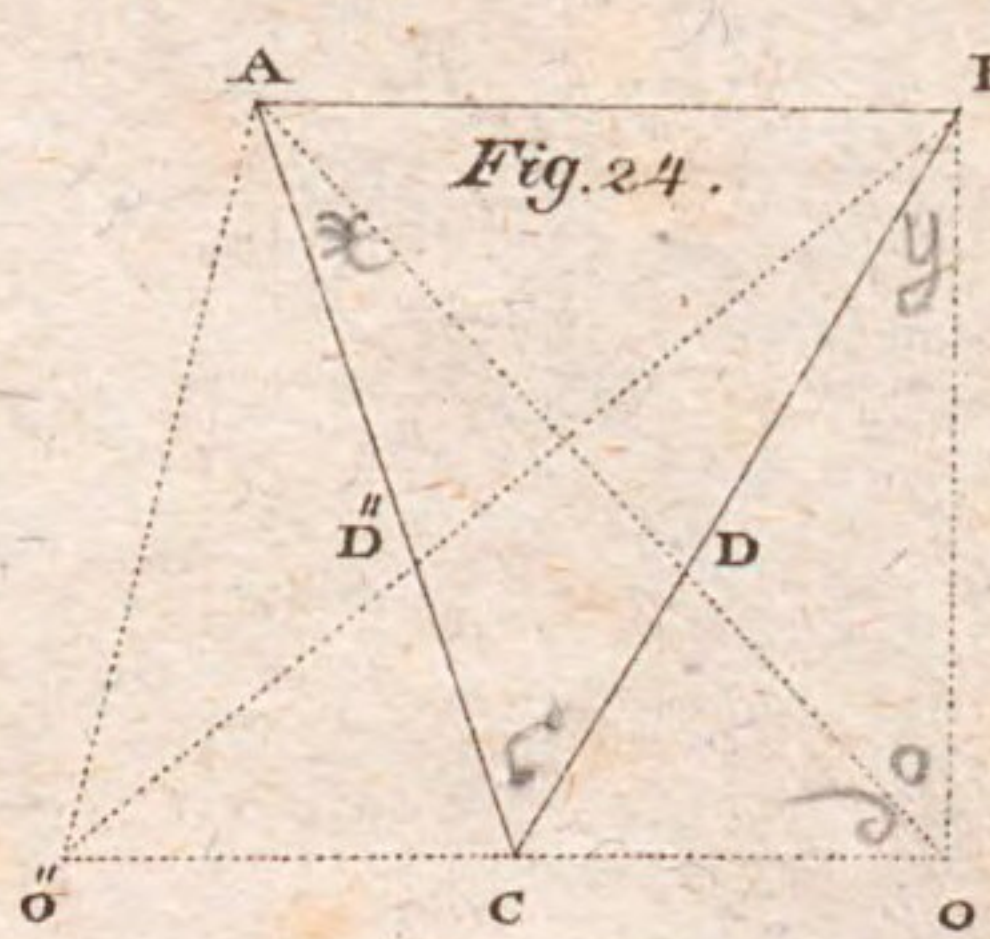


Fig. 24.

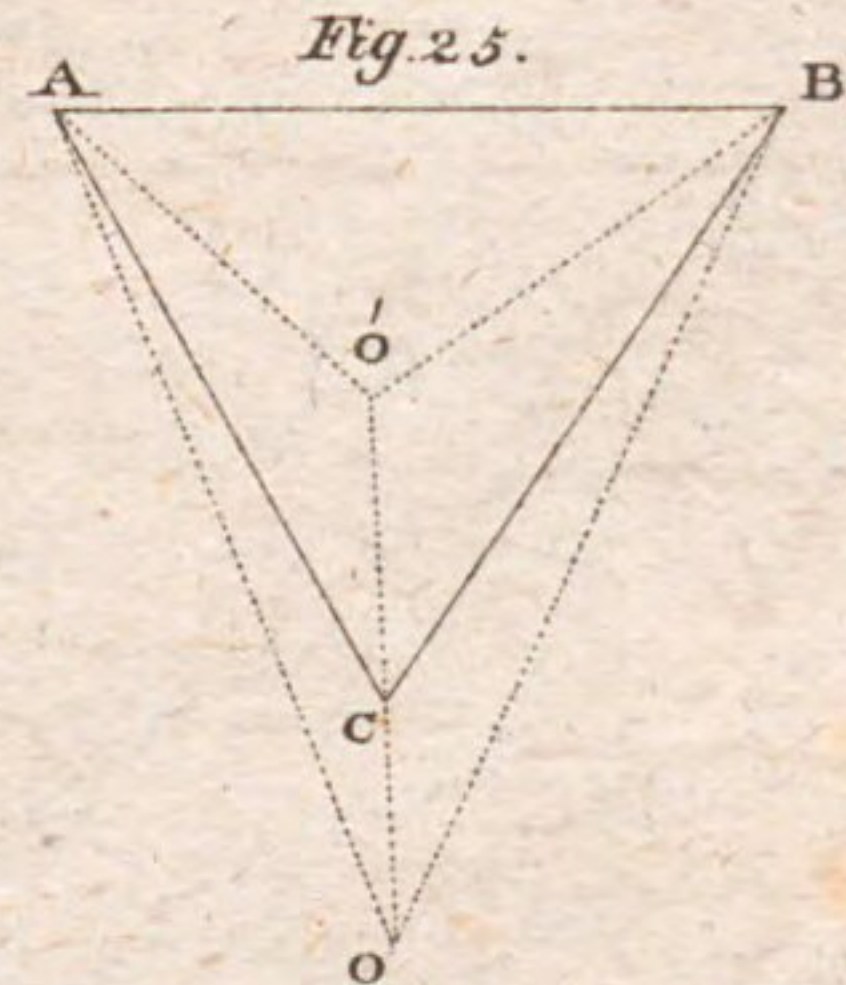


Fig. 25.

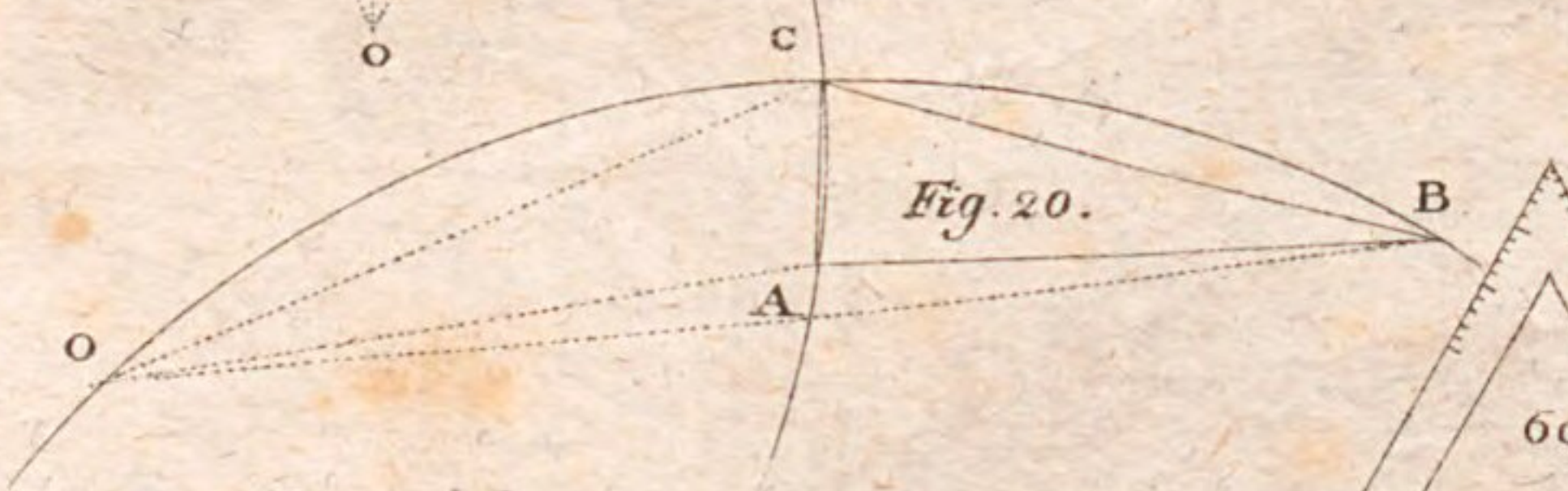


Fig. 20.



Fig. 29.

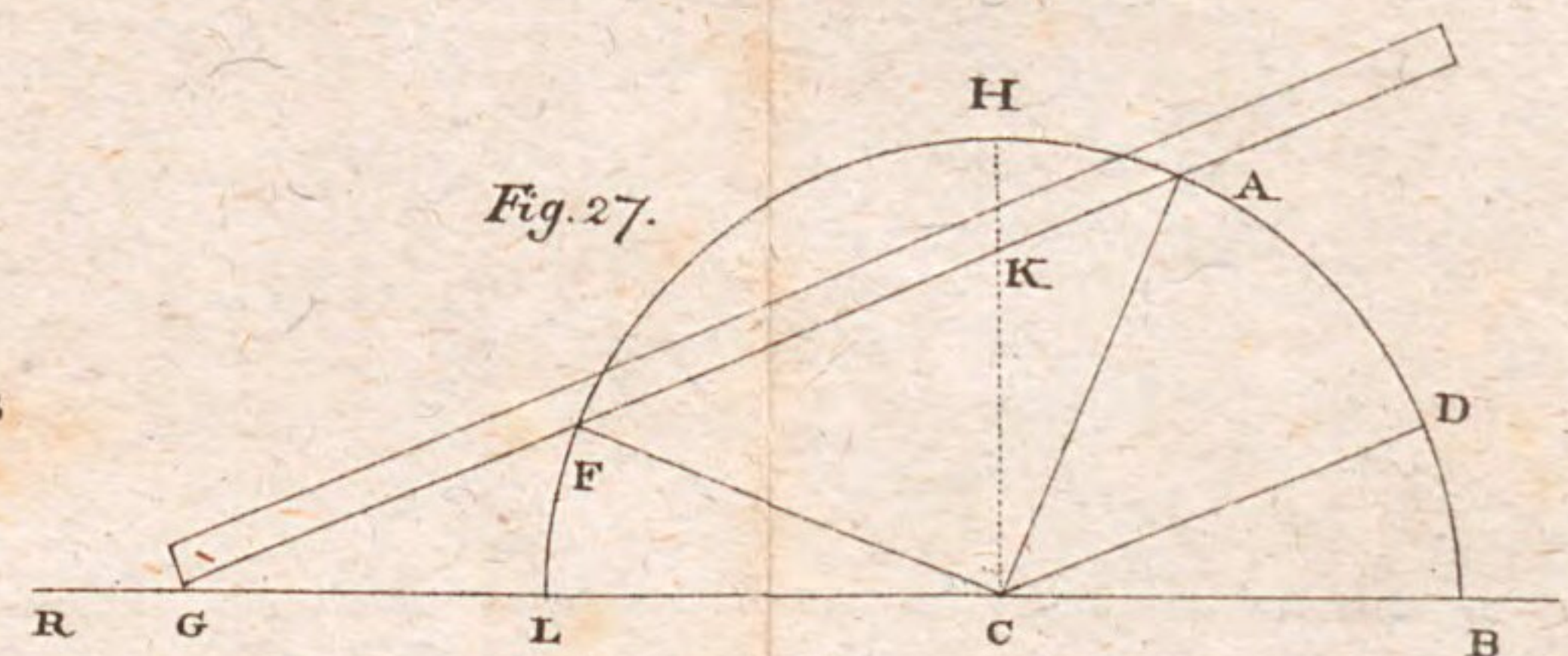


Fig. 27.

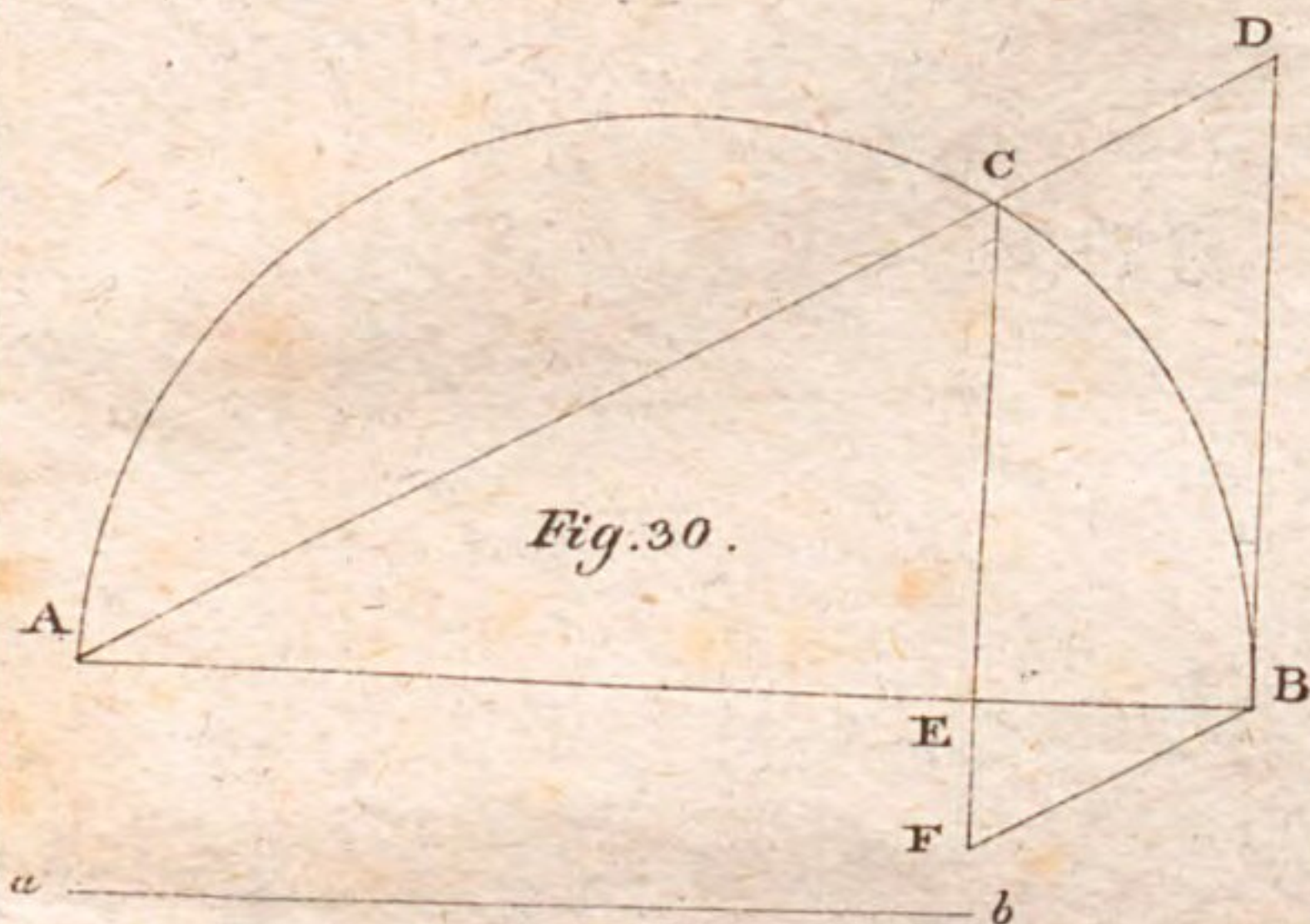


Fig. 30.

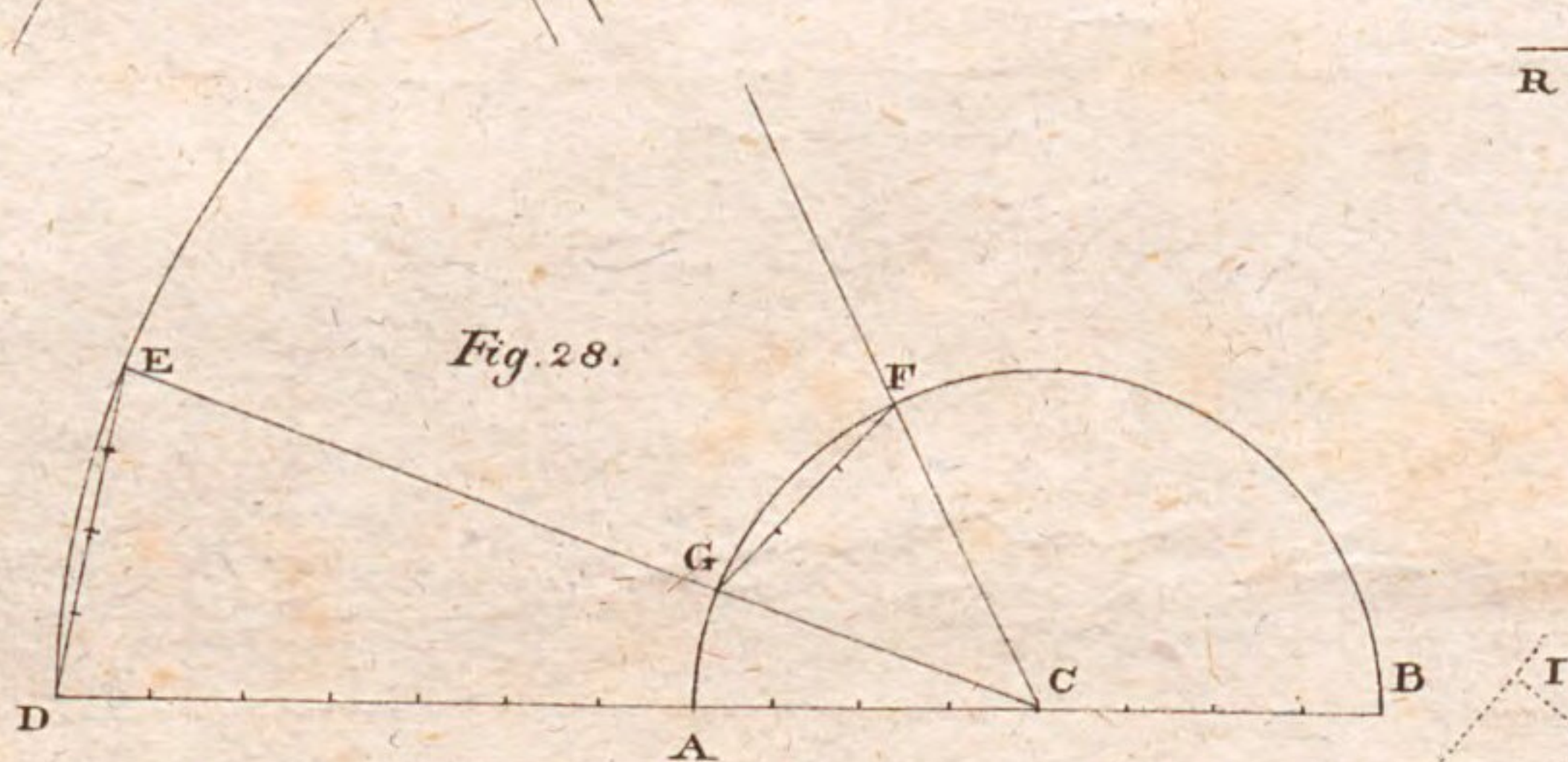


Fig. 28.

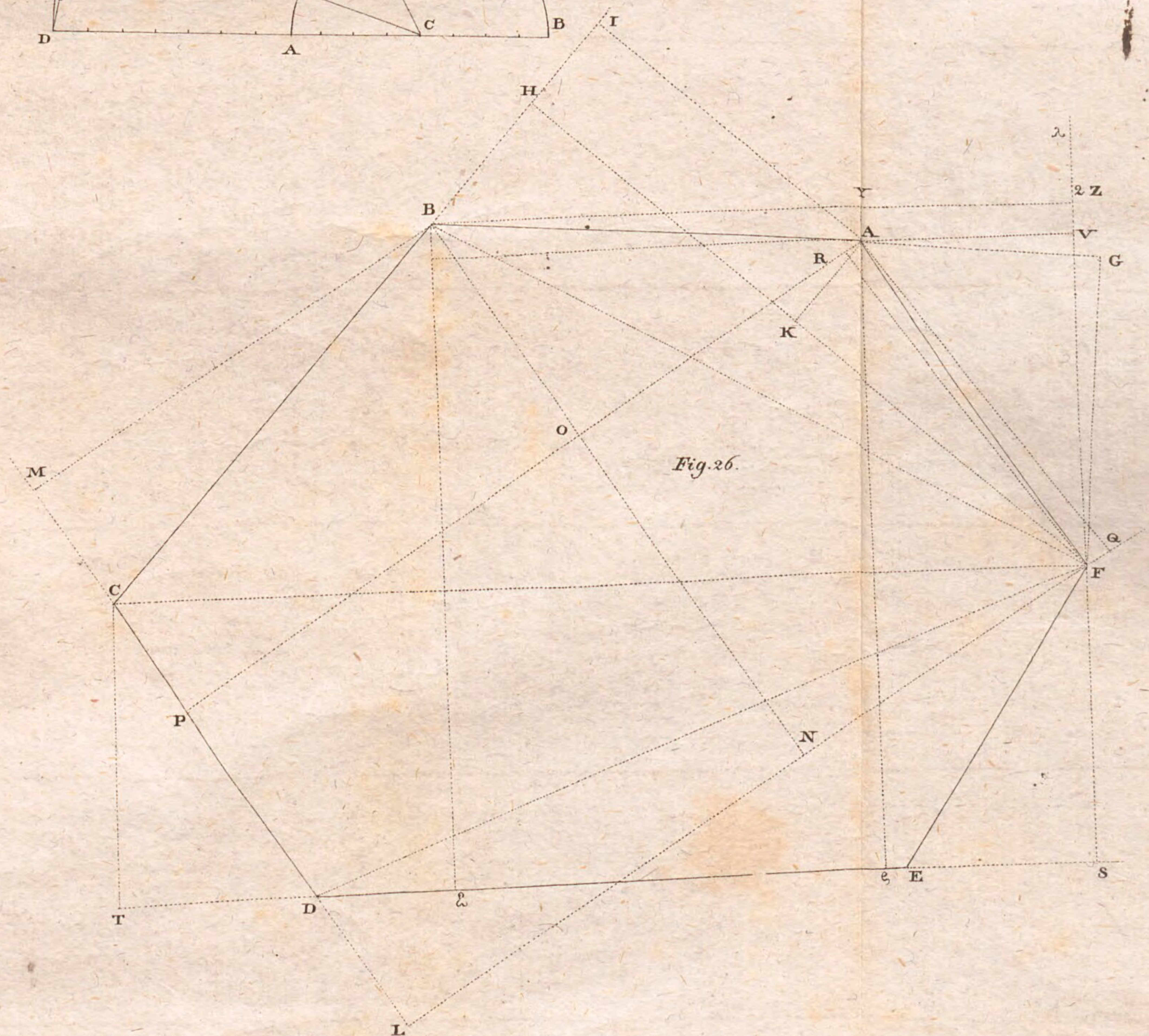


Fig. 26.

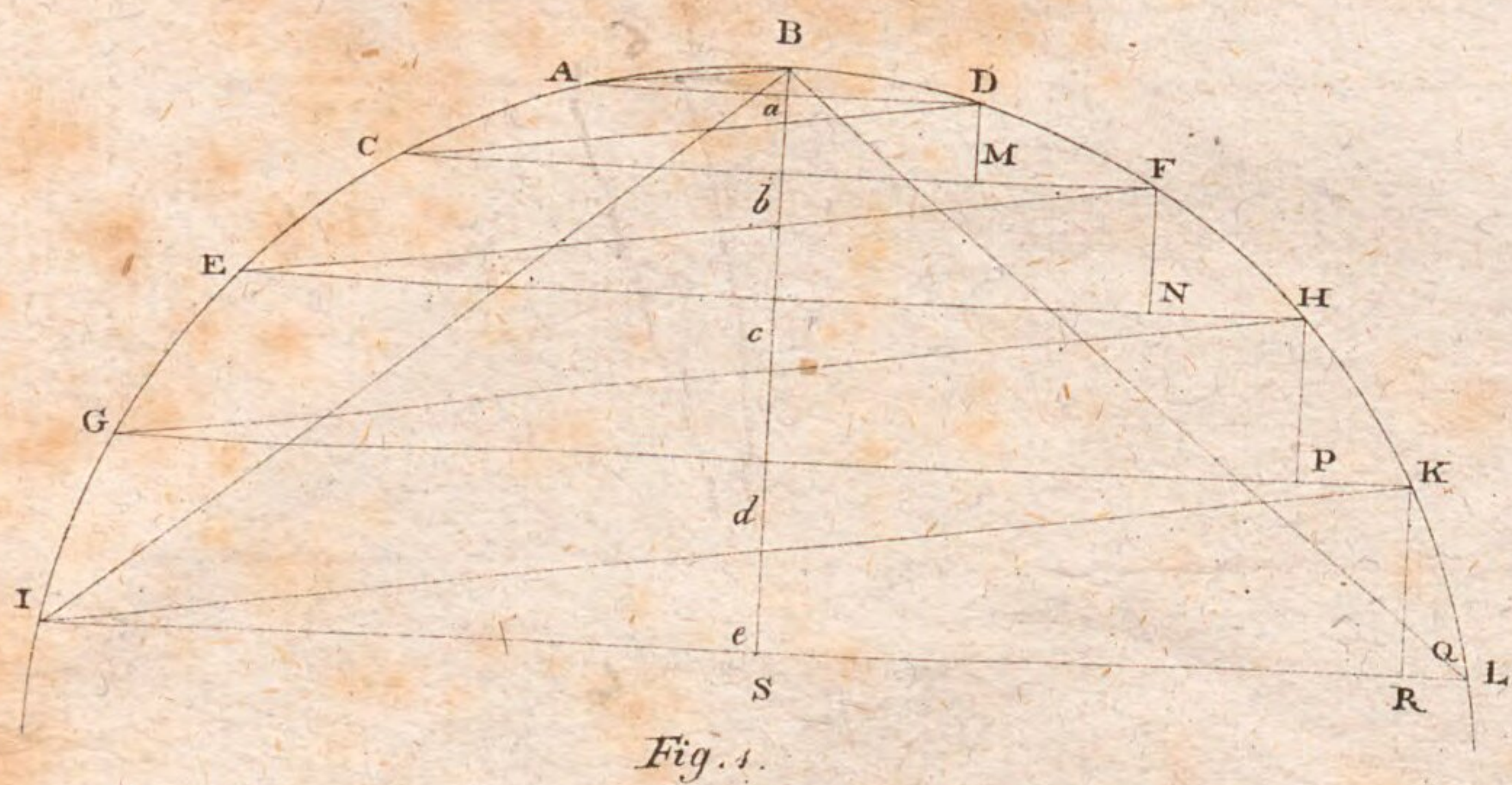


Fig. 1.

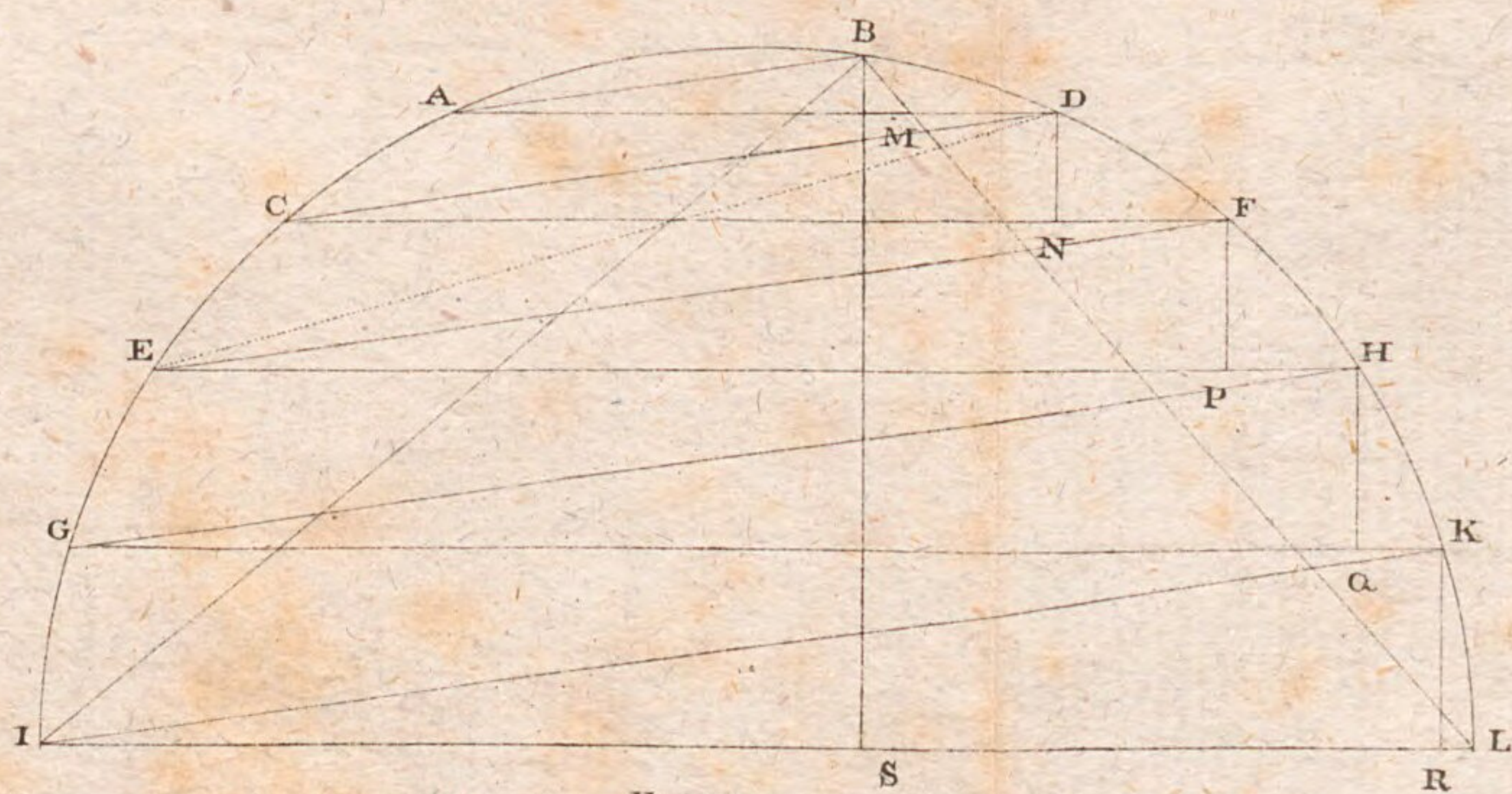


Fig. 2.

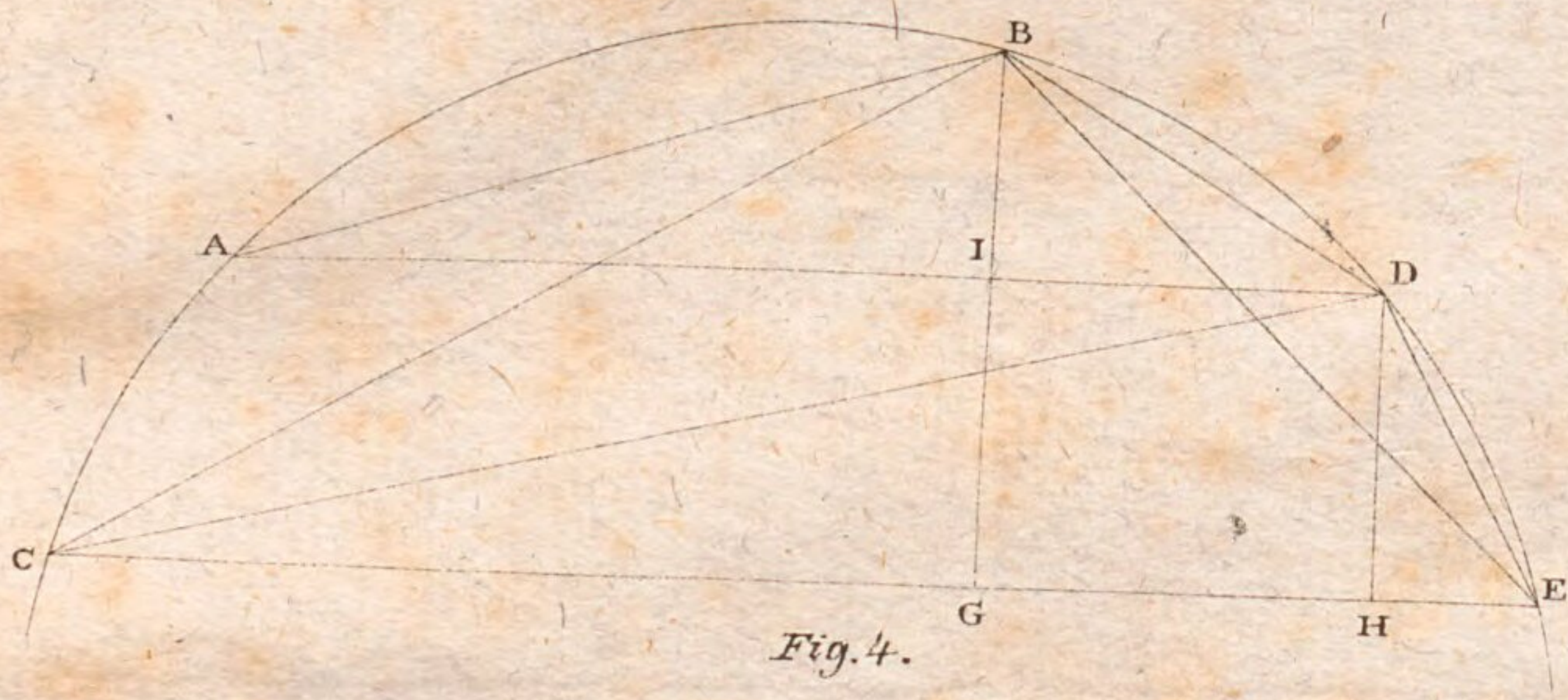


Fig. 3.

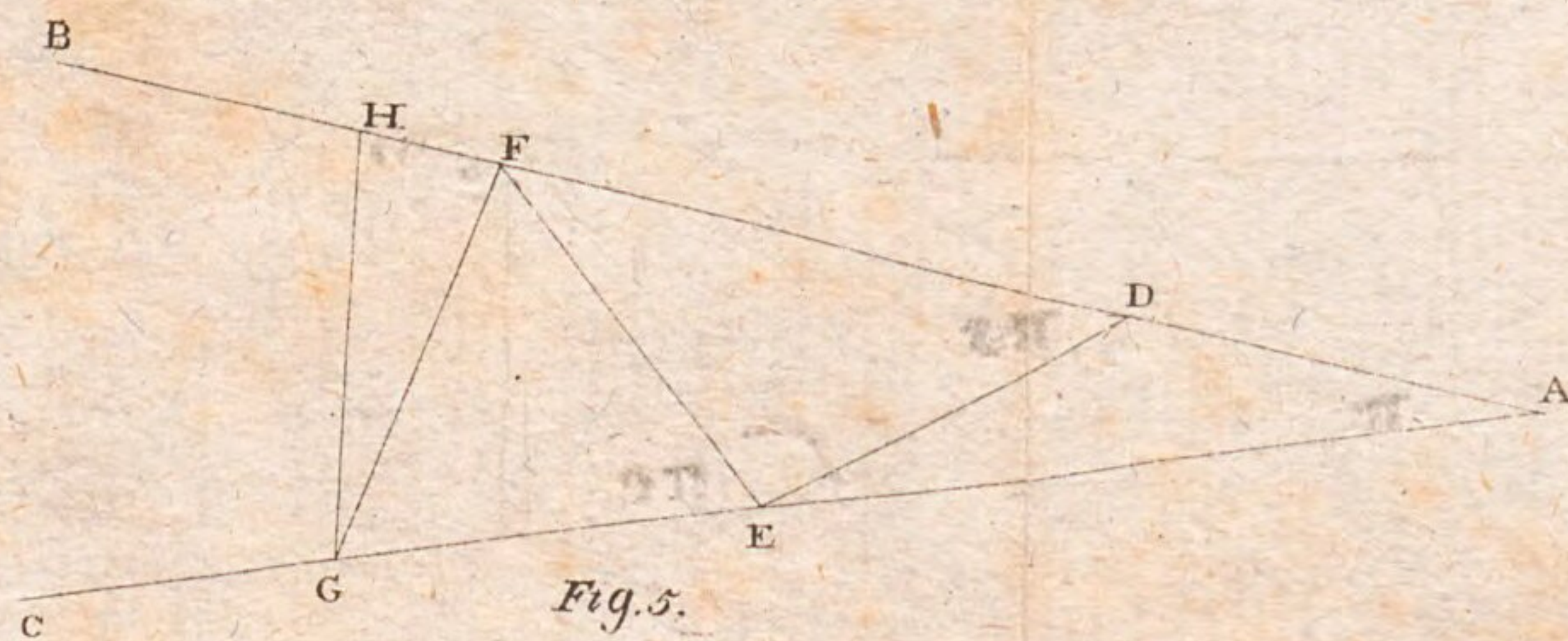


Fig. 4.

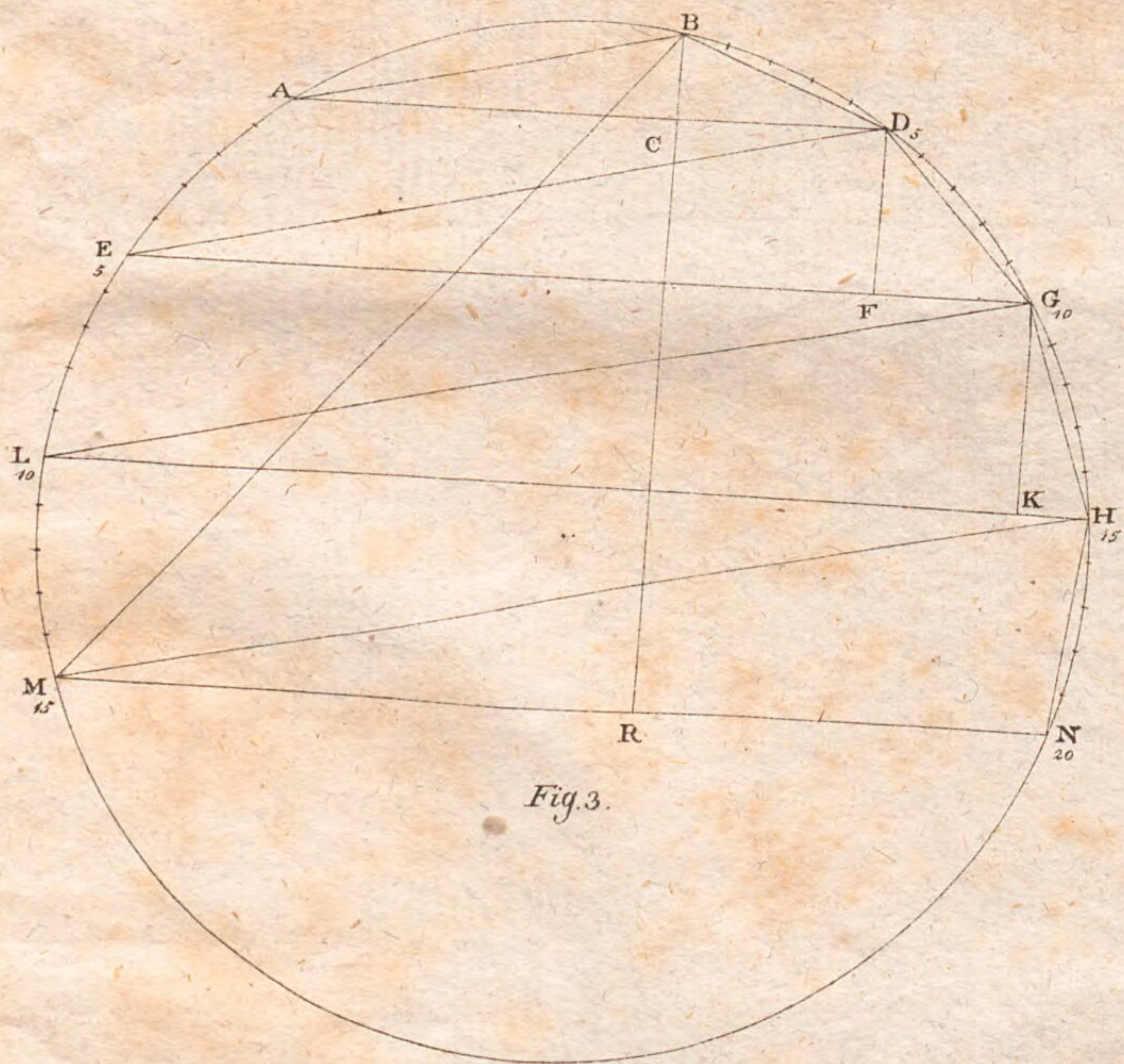


Fig. 5.

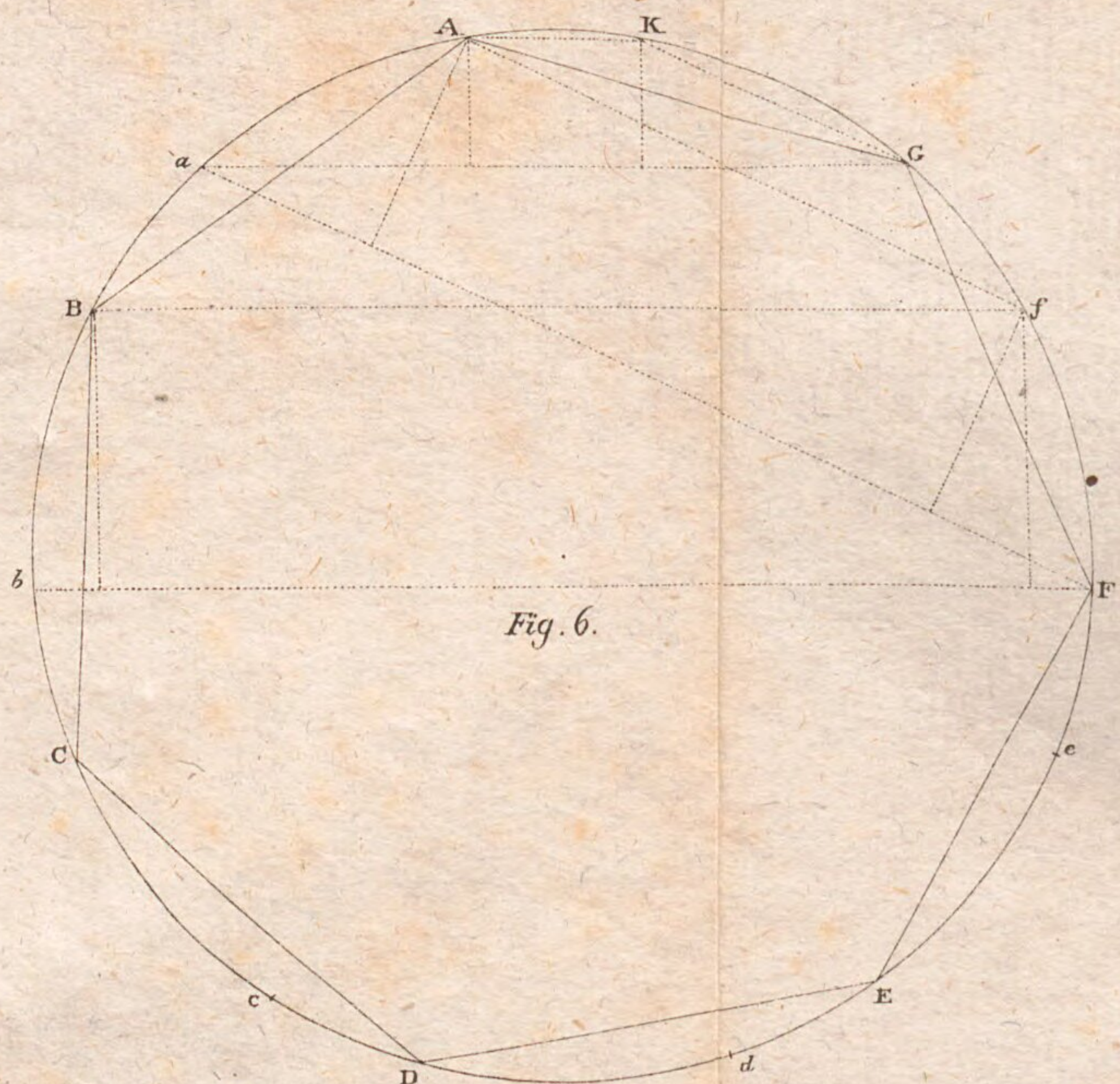


Fig. 6.



3

Spaun, Franz Anton von

Anleitung zur geradlinigten Trigonometrie ... durch die Constructions-
Methode

München 1818

4 Math.p. 348 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053870-6